$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} - \alpha'(t)\dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} - 2\alpha(t)\dfrac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^2 \partial t} + \alpha^2(t)\dfrac{\partial^4 u_\alpha}{\partial x^4} = 0, \\ u_\alpha(x,T) = u_T(x), \ \dfrac{\partial u_\alpha(x,T)}{\partial t} = u'_T(x)\ , \ u_\alpha(0,t) = u_\alpha(l,t) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Доказано [2], что решение $z_\alpha(x,t)$ задачи (7) существует для достаточно широкого круга функций $z_T(x)$, а решение уравнения (6) с начальным условием $z_0(x)=z_\alpha(x,t_0)$, $0<t_0<T$, при $t=T$ сходится к заданной функции $z_T(x)$ при $t_0 \to 0$.

Следовательно, решив задачу (8), а затем положив в (2) $u_0(x)=u_\alpha(x,t_0)$, $u_1(x)=\dfrac{\partial u_\alpha(x,t_0)}{\partial t}$, $0<t_0<T$, получим решение системы (1), (2), (3), которое при при $t_0 \to 0$ сходится к решению, удовлетворяющему условию (4).

Преимущество предлагаемого непрерывного метода состоит в том, что для получения лучших приближений к решению исходной задачи (1), (3), (4) здесь при численной реализации метода следует сделать несколько шагов по времени в регуляризованной задаче (8) вместо того, чтобы, как в случае метода с дискретным параметром регуляризации, решать регуляризованную задачу Коши при некотором новом значении параметра регуляризации.

Список литературы:

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 398 с.
[2] Дунцева Е.А. Некоторые непрерывные и итеративные методы решения некорректных задач: Диссертация к.ф.-м.н. – Нижний Новгород, 2000. – 107 с.
[3] Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 336 с.

О.Н. Кащеева
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

О СИСТЕМАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ SU(4)/S(U(2)×U(2))

В работе построено представление Лакса для двух систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Запишем структурные уравнения симметрического пространства SU(4)/S(U(2)×U(2)) в виде

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega \qquad (1)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} i(\theta^3-\theta^7)/2 & (-\theta^1+i\theta^2)/2 & \varphi^1+i\psi^1 & \varphi^2+i\psi^2 \\ (\theta^1-i\theta^2)/2 & i(-\theta^3-\theta^7)/2 & \varphi^3+i\psi^3 & \varphi^4+i\psi^4 \\ -\varphi^1+i\psi^1 & -\varphi^3+i\psi^3 & i(\theta^6+\theta^7)/2 & (-\theta^4+i\theta^5)/2 \\ -\varphi^2+i\psi^2 & -\varphi^4+i\psi^4 & (\theta^4+i\theta^5)/2 & i(-\theta^6+\theta^7)/2 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\theta^1 = \left(-cosU^2U^3_y - sinU^2 sinU^3 U^1_y\right)dy, \qquad \theta^4 = (-cosU^5U^6_x - sinU^5 sinU^6 U^4_x)dx,$$

$$\theta^2 = \left(sinU^3 cosU^2 U^1_y - sinU^2 U^3_y\right)dy, \qquad \theta^5 = (sinU^6 cosU^5 U^4_x - sinU^5 U^6_x)dx, \quad (2)$$

$$\theta^3 = \left(-\cos U^3 U^1_y - U^2_y\right) dy, \qquad \theta^6 = \left(-\cos U^6 U^4_y - U^5_y\right) dx, \qquad \theta^7 = U^7_x dx,$$

$$\varphi^j = \lambda M^j dx + \frac{1}{\lambda} N^j dy, \qquad \psi^j = \lambda K^j dx + \frac{1}{\lambda} L^j dy, \qquad j = \overline{1,4}, \tag{3}$$

где λ - спектральный параметр,

$$M^j = \left(m_1^j \cos\frac{U^1+U^2}{2} + m_2^j \sin\frac{U^1+U^2}{2}\right)\cos\frac{U^3}{2} +$$

$$+\left(m_3^j \sin\frac{U^1-U^2}{2} + m_4^j \cos\frac{U^1-U^2}{2}\right)\sin\frac{U^3}{2},\ \text{j}=1,2,$$

$$M^j = \left(-m_1^{j-2} \cos\frac{U^1-U^2}{2} - m_2^{j-2} \sin\frac{U^1-U^2}{2}\right)\sin\frac{U^3}{2} +$$

$$+\left(-m_3^{j-2} \sin\frac{U^1+U^2}{2} + m_4^{j-2} \cos\frac{U^1+U^2}{2}\right)\cos\frac{U^3}{2},\ \text{j}=3,4,$$

$$K^j = \left(-m_1^j \sin\frac{U^1+U^2}{2} + m_2^j \cos\frac{U^1+U^2}{2}\right)\cos\frac{U^3}{2} +$$

$$+\left(m_3^j \cos\frac{U^1-U^2}{2} + m_4^j \sin\frac{U^1-U^2}{2}\right)\sin\frac{U^3}{2},\ \text{j}=1,2,$$

$$K^j = \left(m_1^{j-2} \sin\frac{U^1-U^2}{2} - m_2^{j-2} \cos\frac{U^1-U^2}{2}\right)\sin\frac{U^3}{2} +$$

$$+\left(-m_3^{j-2} \cos\frac{U^1+U^2}{2} + m_4^{j-2} \sin\frac{U^1+U^2}{2}\right)\cos\frac{U^3}{2},\ \text{j}=3,4,$$

$$N^j = \left(n_1^j \cos\frac{U^4+U^5-2U^7}{2} - n_2^j \sin\frac{U^4+U^5-2U^7}{2}\right)\cos\frac{U^6}{2} +$$

$$+\left(n_3^j \cos\frac{U^4-U^5+2U^7}{2} + n_4^j \sin\frac{U^4-U^5+2U^7}{2}\right)\sin\frac{U^6}{2},\ \text{j}=1,3,$$

$$N^j = \left(-n_1^{j-1} \cos\frac{U^4-U^5-2U^7}{2} + n_2^{j-1} \sin\frac{U^4-U^5-2U^7}{2}\right)\sin\frac{U^6}{2} +$$

$$+\left(n_3^{j-1} \cos\frac{U^4+U^5+2U^7}{2} + n_4^{j-1} \sin\frac{U^4+U^5+2U^7}{2}\right)\cos\frac{U^6}{2},\ \text{j}=2,4,$$

$$L^j = \left(n_1^j \sin\frac{U^4+U^5-2U^7}{2} + n_2^j \cos\frac{U^4+U^5-2U^7}{2}\right)\cos\frac{U^6}{2} +$$

$$+\left(-n_3^j \sin\frac{U^4-U^5+2U^7}{2} + n_4^j \cos\frac{U^4-U^5+2U^7}{2}\right)\sin\frac{U^6}{2},\ \text{j}=1,3,$$

$$L^j = \left(-n_1^{j-1} \sin\frac{U^4-U^5-2U^7}{2} - n_2^{j-1} \cos\frac{U^4-U^5-2U^7}{2}\right)\sin\frac{U^6}{2} +$$

$$+\left(-n_3^{j-1} \sin\frac{U^4+U^5+2U^7}{2} + n_4^{j-1} \cos\frac{U^4+U^5+2U^7}{2}\right)\cos\frac{U^6}{2},\ j=2,4,$$

$m_j^1, m_j^2 n_j^1, n_j^3$ $(j = \overline{1,4})$ – произвольные константы. Подстановка форм (2),(3) в структурные уравнения (1), приводит к системе уравнений Эйлера-Лагранжа для лагранжиана

$$L = \sum_{j=1}^{6} U_x^j U_y^j + 2\cos U^3 U_y^1 U_x^2 + 2\cos U^6\, U_x^4 U_y^5 + 2U_x^7 U_y^7 + 8\sum_{j=1}^{4}(N^j M^j + K^j L^j),$$

т.е. соотношения (1)–(3) определяют представление Лакса для данной системы.

Представление Лакса для второй системы, ассоциированной с симметрическим пространством SU(4)/S(U(2)×U(2)), получим, полагая

$$\theta^1 = \left(-U_y^1 - \frac{1}{1 - U^1U^2} U_y^2\right) dy, \qquad \theta^2 = i\left(U_y^1 - \frac{1}{1 - U^1U^2} U_y^2\right) dy,$$

$$\theta^3 = -\frac{i}{1 - U^1U^2}\left(U^2 U_x^1 dx + U^1 U_y^2 dy\right),$$

$$\theta^4 = \left(-U_y^3 - \frac{1}{1 - U^3U^4} U_y^4\right) dy, \qquad \theta^5 = i\left(U_y^3 - \frac{1}{1 - U^3U^4} U_y^4\right) dy,$$

$$\theta^6 = -\frac{i}{1 - U^3U^4}\left(U^4 U_x^3 dx + U^3 U_y^4 dy\right), \qquad \theta^7 = iU_x^5 dx + \frac{1}{2}\theta^3 - \frac{1}{2}\theta^6,$$

$$\begin{aligned}
&\varphi^1 = \lambda[U^1U^4 - U^2U^3 - i(U^1U^4 + U^2U^3)]dx \\
&+ \frac{1}{8\lambda}\left[ne^{U^5} - me^{-U^5} + i\left(ne^{U^5} + me^{-U^5}\right)\right] dy, \qquad (4)\\
&\varphi^2 = \lambda[U^1(1 - U^3U^4) - U^2 - i\{U^1(1 - U^3U^4) + U^2\}]dx,\\
&\varphi^3 = \lambda[U^4 - U^3(1 - U^1U^2) - i\{U^3(1 - U^1U^2) + U^4\}]dx,\\
&\varphi^4 = \lambda[U^1U^2 - U^3U^4 + i(U^1U^2 + U^3U^4 - 2)]dx,\\
&\psi^1 = \overline{\varphi^1}, \psi^2 = \overline{\varphi^2}, \psi^3 = \overline{\varphi^3}, \psi^4 = \overline{\varphi^4}.
\end{aligned}$$

Подстановка форм (4) в (1) приводит к системе уравнений Эйлра-Лагранжа для лагранжиана

$$L = \frac{1}{1 - U^1U^2}\left(U_x^1 U_y^2 + U_y^1 U_x^2\right) + \frac{1}{1 - U^3U^4}\left(U_x^3 U_y^4 + U_y^3 U_x^4\right) - \frac{1}{2} U_x^5 U_y^5 +$$
$$+ 2mU^2U^3e^{-U^5} + 2nU^1U^4e^{U^5}.$$

Она допускает редукции к некоторым известным системам.

Полагая $V^1 = U^1 = U^4, V^2 = U^2 = U^3, V^3 = U^5,$ получим систему уравнений Эйлера-Лагранжа для лагранжиана

$$L = \frac{1}{1 - V^1V^2}\left(V_x^1 V_y^2 + V_y^1 V_x^2\right) - \frac{1}{4} V_x^3 V_y^3 + m(V^2)^2 e^{-V^3} + n(V^1)^2 e^{V^3}.$$

Интегрируемые системы с лагранжианом вида

$$L = \frac{1}{1 - V^1V^2}\left(V_x^1 V_y^2 + V_y^1 V_x^2\right) - \frac{1}{4} V_x^3 V_y^3 + f(V^1, V^2, V^3)$$

изучены в работах Мешкова А.Г. и Демского Д.К. ([1], [2]).

Кроме того, система допускает редукцию к системе Лунда-Редже (комплексному sin-Gordon), которая в свою очередь является известным интегрируемым обобщением уравнения sin-Gordon. Действительно, полагая $n = m, U^5 = 0, U^3 = U^1, U^4 = U^2,$ получим систему уравнений Эйлера-Лагранжа для лагранжиана

$$L = \frac{1}{1 - U^1U^2}\left(U_x^1 U_y^2 + U_y^1 U_x^2\right) + 2nU^1U^2.$$

Далее, полагая $U^1 = \sin\frac{V^2}{2} e^{\frac{iV^1}{2}}$, $U^2 = \sin\frac{V^2}{2} e^{-\frac{iV^1}{2}}$, придем к системе с лагранжианом

$$L = V_x^1 V_y^1 tg^2\frac{V^2}{2} + V_x^2 V_y^2 + 2n\cos^2\frac{V^2}{2}$$

– комплексный sin-Gordon. Отсюда, при $V^1 = 0,\ V^2 = V$ получим уравнение sin-Gordon.

Метрика

$$ds^2 = tg^2\frac{V^2}{2}(dV^1)^2 + (dV^2)^2,$$

ассоциированная с последним лагранжианом, используется при описании «чернодырной» модели (black hole) в теории поля. В работах [3],[4] построено представление Лакса класса систем, которые содержат эту «черндырную» метрику. В том числе, получено представление Лакса для системы с лагранжианом

$$L = V_x^1 V_y^1 tg^2\frac{V^2}{2} + V_x^2 V_y^2 + V_x^3 V_y^3 tg^2\frac{V^4}{2} + V_x^4 V_y^4 + 2k\cos V^2 \cos V^4,$$

которую можно рассматривать как двойной комплексный sin-Gordon.

Список литературы:

[1] Демской Д.К., Мешков А.Г. Представление Лакса для триплета скалярных полей. // ТМФ. – 2003. – Т. 134, N 3. – С. 401.
[2] Demskoi D.K., Meshkov A.G. Zero-Curvature Representation for a Chiral-Type Three-Field System. //Inverse Problems. – 2003. – Vol. 19, № 3 – P. 563–567.
[3] Баландин А.В., Кащеева О.Н. Представление Лакса систем кирального типа. // Нелинейная динамика. – 2007. – Т. 3, N 2. – С. 175–202.
[4] Balandin A.V., Kashcheeva O.N. Lax representation of WZNW-like systems. // Regular and chaotic dynamics. – 2006. – V. 11, N 4. – P. 435–453.

М.С. Киняпина
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

КАЧЕСТВЕННО-ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ

В работе исследуются различные режимы, наблюдающиеся в системе связанных осцилляторов. Изучается влияние начальных условий и параметров системы на изменение фазовых портретов.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику связанных маятников:

$$\ddot{\varphi} + \Lambda\dot{\varphi} + A\sin\varphi = \gamma \qquad (1)$$

где $\varphi = \|\varphi_i\|_n^1$ – n-вектор фазовых переменных,

$\gamma = \|\gamma_i\|_n^1$ – n-вектор внешних воздействий,