Л.В. Лебедева
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УСТАНОВИТЬ НАЛИЧИЕ ТРАЕКТОРИИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ПЕРИОДА ОТОБРАЖЕНИЯ ОТРЕЗКА

Описан метод, позволяющий для унимодального отображения отрезка определить существование в его фазовом пространстве цикла конкретного периода. Метод основан на геометрических свойствах отображающей функции

Рассматривается однопараметрическое семейство непрерывных отображений $F_a : x_i = f(x_{i-1}, a)$ отрезка $I = \{x / 0 \le x \le 1\}$ на себя с целью сформулировать геометрические условия, необходимые для существования фазовой траектории (цикла) определенного периода p, т.е. траектории x_0, $x_1 = f(x_0, a)$, $x_2 = f(x_1, a) = f^2(x_0, a)$, … , для которой выполнены два соотношения 1) $x_p = x_0$, 2) $x_i \ne x_0$, если $0 < i < p$.

Предположим, что семейство отображений F_a обладает следующими свойствами Sh.

1. Параметр a принадлежит множеству $[a_1, a_3]$ такому, что отображение F_{a_1} имеет неподвижную точку x_1 (периодическую траекторию периода 1), притягивающую все точки отрезка I , а отображение F_{a_3} имеет цикл периода 3.

2. При любом фиксированном значении параметра a функция $f(x, a)$, рассматриваемая как функция одной переменной x, или монотонно убывает ($\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ при $0 < x < 1$), или имеет в точке α единственный максимум ($\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ при $0 \le x < \alpha$; $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$ при $\alpha < x \le 1$). Причем $f(\alpha, a) = 1$.

3. $f(1, a) = 0$

Отображение F_a рассматривалось многими авторами [1–7]. Наличие константы Фейгенбаума, возможность существования сложных предельных множеств (например, странного аттрактора или канторова множества) – вот лишь некоторые из наиболее известных результатов исследования свойств рассматриваемого отображения.

В настоящей работе даны геометрические условия существования цикла любого конкретного нечетного периода.

Обозначим через a_k^* бифуркационное значение первого рождения цикла периода k : при любом $a < a_k^*$ отображение F_a циклов периода k не имеет, при $a = a_k^*$ отображение $F_{a_л^*}$ имеет цикл периода k .

Для отображений семейства F_a справедлива теорема А.Н. Шарковского [2] и следующая [7] из нее

Теорема 1: при выполнении условий Sh отображение F_a имеет последовательность бифуркационных значений a_k^* таких, что $a_{k_2}^* < a_{k_1}^*$, где k_2 – число, следующее за любым числом k_1 в порядке А.Н. Шарковского:

$$3 \succ 5 \succ \ldots \succ 4 \cdot 5 \succ 4 \cdot 3 \succ \ldots \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 3 \succ \ldots \succ 4 \succ 2 \succ 1$$

Какой вид имеет отображающая функция $f(x,a)$, если значение параметра a равно бифуркационному значению a_k^*?

Через $\mu = \mu(a)$ обозначим значение функции $f(x,a)$ при $x = 0$, т.е. $\mu(a) = f(0,a)$. Для отображения, удовлетворяющего условиям Sh, справедливо следующеие.

Лемма 1. Если $\mu(a) = 1$ ($\alpha = 0$), то отображение имеет циклы периода не выше 2.

Лемма 2. Если $\mu(a) = \alpha$, то отображение имеет циклы периода 3.

Справедливость этих лемм следует из [4, 6] и сформулированной выше теоремы 1.

Кроме того, справедливы леммы 3–4.

Лемма 3. Если $\mu(a) > x_1$, то отображение имеет циклы только четных периодов.

Доказательство. Пусть $I_1 = \{x / 0 \le x < \alpha\}$, $I_2 = \{x / \alpha < x \le 1\}$. Тогда $I = I_1 \cup \{x_1\} \cup I_2$. Под действием отображения при выполнении условия леммы $\mu(a) > x_1$ отрезок I_1 переходит в I_2, и отрезок I_2 переходит в отрезок I_1, что и доказывает лемму.

Лемма 4. Если $\mu(a) = x_1$, то отображение имеет тривиальную гомоклиническую траекторию { x_1, $f(x_1,a)$, $f^2(x_1,a)$, … , x_1}.

Доказательство очевидно.

Найдем условия, при которых существует цикл произвольного нечетного периода $2i+1$, что, как следует из теоремы 1, соответствует требованию $\alpha < \mu(a) < x_1$. С помощью отображения f^{-2} на интервале $(\alpha,1)$ построим последовательность точек $\eta_1 = \alpha$, $\eta_2 = f^{-2}(\eta_1)$, $\eta_3 = f^{-2}(\eta_2)$, … Справедлива

Теорема 2. Если $\mu = \eta_i$ ($i > 1$), то отображение имеет цикл периода $2i+1$ и не имеет цикла периода $2i-1$.

Доказательство. Через $\overline{x_1}$ ($\overline{\overline{x_1}}$) обозначим точку $\overline{x_1} \in (0,\alpha)$ ($\overline{\overline{x_1}} \in (x_1,1)$) такую, что $f(x_1) = \overline{x_1}$ ($f(\overline{\overline{x_1}}) = x_1$). Рассмотрим функцию $\psi_k(x) = f^{2k+1}(x)$, порождающую отображение Φ_k. Будем говорить, что функция ψ_k имеет структуру L_k, если выполнены следующие условия 1–3.

1. $(0,\overline{x_1})$, $(\overline{\overline{x_1}},1)$ – интервалы монотонного возрастания функции $\psi_k(x)$ ($\psi_k(0) = 0$, $\psi_k'(0) = 0$, $\psi_k(\overline{x_1}) = x_1$, $\psi_k(\overline{\overline{x_1}}) = x_1$, $\psi_k(1) = 1$), содержащие по две неподвижные точки отображения Φ_k.

2.1. На интервале $(\overline{x_1}, x_1)$ функция $\psi_k(x)$ имеет 2^k точек z_l локальных максимумов, при чем $z_{2^k} = f^{-2k}(\alpha)$ и $\forall l = \overline{1,2^k}$: $\psi_k(z_l) = 1$, $\psi_k'(z_l) = 0$.

2.2. На интервале $(\overline{x_1}, x_1)$ функция $\psi_k(x)$ имеет $2^k - 1$ точки y_{il} локальных минимумов:

$$\begin{cases} \forall i = \overline{0,k-1},\ \forall j = \overline{1,2^{k-1-i}} \\ \psi_k(y_{2^i+2^{i+1}(j-1)}) = y_{2^i+2^{i+2}(2^{k-1-i}-1)} = \psi_k^{-2(k-i-1)} \\ \psi_k'(y_i) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Минимальные значения расположены на k различных уровнях: один локальный минимум равен α, два – $f^{-2}(\alpha)$, четыре – $f^{-4}(\alpha)$ и т.д. Самое правое из минимальных значений на каждом уровне является неподвижной точкой отображения Φ_k.

2.3. Выполнено соотношение:

$$\overline{x_1} < z_1 < y_1 < \ldots < z_{2^k-1} < y_{2^k-1} < z_{2^k} < x_1 \tag{2}$$

3.1. На интервале $(x_1, \overline{\overline{x_1}})$ функция $\psi_k(x)$ имеет $2^{k-1} - 1$ точек y_i' локальных максимумов, ($k-1$) из которых лежит на биссектрисе $x = f(x)$. В остальных точках y_i' локальных максимумов выполнено неравенство $\psi_k(y_i') < y_i'$.

3.2. На интервале $(x_1, \overline{\overline{x_1}})$ функция $\psi_k(x)$ имеет 2^{k-1} точек z_i' локальных минимумов:

$$z_i' = f^{-(2k-1)}(\alpha),\ \psi'(z_i') = 0,\ i = \overline{1,2^{k-1}} \tag{3}$$

2.3. Выполнено соотношение:

$$x_1 < z_1' < y_1' < \ldots < y_{2^{k-1}-1}' < z_{2^{k-1}}' < \overline{\overline{x_1}}$$

Т.о., если функция $\psi_k(x)$ имеет структуру L_k при $a = a^*$, то отображение имеет $2(2k+1)$ неподвижные точки, а именно, имеет два цикла периода $(2k+1)$, один из которых устойчив в силу (1) и (3).

Непосредственным построением отображения $F^3(x) = \psi_1(x)$ и $F^5(x) = \psi_3(x)$ можно убедиться, что функция $\psi_1(x)$ имеет структуру L_1, если $f(0) = \alpha$, и функция $\psi_2(x)$ имеет структуру L_2, если $f(0) = f^{-2}(\alpha)$. Соответствующие значения параметра a обозначим через a_3 и a_5.

Методом математической индукции доказывается, что если значение параметра a таково, что $\mu = f^{-2k-2}(\alpha)$, то отображение имеет два цикла периода $2(k+1)+1$.

Рассмотрим изменение структуры функции $\psi_{2(k+1)+1}$ при переходе параметра от значения β_{2k+1}, при котором $\mu = f^{-2k+2}(\alpha)$, к значению β_{2k+3}, при котором

$\mu = f^{-2k}(\alpha)$. Формулы (1), (2) показывают, что при этом циклы периода $2k+1$ исчезают. При $a = \beta_{2k+3}$ существует два цикла периода $2(k+1)+1$, один из которых устойчив, и не существует периода $2k+1$. Структура функции ψ_{2k+1} есть структура L_{K+1}.

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Для всех $i \geq 1$ справедливо: если $a = a^*_{2i+1}$, то $\eta_i \leq \mu < \eta_{i+1}$.

Следствие 2. Циклы нечетного периода появляются вследствие бифуркации типа $\lambda = +1$.

Следствие 3. Если функция $f(x,a)$ является кусочно-линейной:

$$f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{(1-\mu)x}{\alpha} + \mu, & 0 < x \leq \alpha \\ \dfrac{x-1}{\alpha-1}, & \alpha < x < 1 \end{cases},$$

то равенство $a = a^*_{2i+1}$ равносильно условию $\mu = \eta_i$.

На основании этой теоремы был построен алгоритм [8], позволяющий установить наличие или отсутствие периодической траектории любого периода у отображения семейства F_a. Алгоритм был применен при исследовании динамических свойств нескольких конкретных отображений [7, 9, 10].

Список литературы:

[1] Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность. – Ученые записки ГГУ. 1939, вып. 12, с. 215.
[2] Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя – УМЖ, 1964, т. 161, с. 61–72.
[3] Нитецки Э. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975, 304 с.
[4] May R. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature. Vol. 261, June, 10, 1976.
[5] Feigenbaum M.J. The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations, J. of Statistical Physics, Vol. 21, No. 6, 1979.
[6] Collet P. and Eckmann J.-P. Iterated Maps on the Interval. Dynamical Systems. Basel, Birkhauser, 1980
[7] Белых В.Н., Лебедева Л.В. Исследование одного отображения окружности. – ПММ, 1982, т. 46, вып. 5. с. 771–776.
[8] Лебедева Л.В. Определение наличия периодической траектории унимодального отображения отрезка. // Математическое моделирование и оптимизация: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Под ред. А.В. Сергиевского; Нижегородский гос. ун-т – Нижний Новгород, 1996, с. 106–111.
[9] Лебедева Л.В. О динамике дискретных одномерных систем фазовой синхронизации. // Теоретическая электротехника: Республ. межведом. науч.-техн. сб. / Под ред. Л.А.Синицкого; Львовский гос. ун-т. Львов, 1986. с. 39–43.
[10] Лебедева Л.В. Применение теории отображения отрезка к изучению динамических свойств манипулятора фазы с ФАП // Материалы международной заочной научно-практической конференции «Математика и информационные технологии в современном мире», Новосибирск: Изд. «Сибирская ассоциация консультантов», 2011, с. 18–24.