

две взаимодействующие подковы Смейла, а неустойчивые многообразия седел $(x_1, 0)$ и $(-x_1, 0)$ имеют грубые пересечения по гомоклиническим и гетероклиническим орбитам.

3) На интервале (a^G, a^H) отображение F имеет бесчисленное множество бифуркаций периодических орбит и гомоклинических траекторий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00964-а)

Список литературы:

[1] Белых В.Н., Украинский Б.С. Хаотические аттракторы и гомоклинические бифуркации многомерной системы Лурье с дискретным временем. Международная конференция по математической теории управления и механике, 1–5 июля 2011, Суздаль, Россия.

Е.В. Панкратова
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

КЛАСТЕРНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ ИНЕРЦИОННО СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

В работе исследуются различные синхронные режимы, наблюдающиеся в системе инерционно связанных осцилляторов. Показано, что в рассматриваемом ансамбле элементов возможно установление полной, а также различных типов противофазной и кластерной синхронизации. Изучается влияние начальных условий и параметров системы на изменение характера поведения осцилляторов.

Исследование особенностей динамики многоэлементных колебательных систем, в частности, изучение различных синхронных режимов, является актуальной задачей современной нелинейной динамики. Значительный интерес в таких системах вызывают режимы полной и кластерной синхронизации. В отличие от полной синхронизации, при которой все элементы ансамбля совершают идентичные колебания [1,], при кластерной синхронизации наблюдается идентичное поведение лишь отдельных групп элементов (кластеров) [3,].

В настоящей работе изучение режимов синхронного поведения проводится в рамках системы нелинейно связанных осцилляторов вида:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + \Phi(x_i, \dot{x}_i) &= \delta \ddot{y}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \ddot{y} + h\dot{y} + \Omega^2 y &= \sum_{i=1}^n \Phi(x_i, \dot{x}_i), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_i, y \in R^1$, $\Phi(x_i, dx_i/dt) = \omega^2 x_i + F(x_i, dx_i/dt)$, $F(x_i, dx_i/dt) = \lambda(x_i^2 - 1)dx_i/dt - \alpha x_i^3$ – нелинейная функция, определяющая динамику i -го элемента, h – параметр диссипации, δ – параметр связи. Исследование возможных притягивающих множеств и их бассейнов притяжения, наблюдающихся в системе (1) при $n=2$, было проведено в работах [5,6]. Было показано, что при $n=2$ могут наблюдаться различные синхронные режимы поведения: полная, противофазная и фазовая синхронизация.

В данной работе исследуются особенности синхронного поведения при $n>2$. Изучено влияние начальных условий на формирование различных типов синхронного поведения. В частности, показано, что при $n>2$ в системе (1) может наблюдаться ре-

жим полной синхронизации осцилляторов, при котором $x_i = x$, $dx_i/dt = dx/dt$, $i=1, 2, \dots, n$. В этом случае система (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Phi(x, \dot{x}) &= \delta \dot{y}, \\ \ddot{y} + h\dot{y} + \Omega^2 y &= n\Phi(x, \dot{x}). \end{aligned} \quad (2)$$

Обнаружено, что существует область параметров системы, где изменение начальных условий не влияет на характер поведения системы и всегда устанавливается режим полной синхронизации осцилляторов.

Кроме того, в системе (1) могут наблюдаться различные локально устойчивые режимы кластерной синхронизации, при которых полностью синхронизованы лишь любые p из n осцилляторов: $x_{i_1}(t) = x_{i_2}(t) = \dots = x_{i_p}(t) = x_i(t)$. На рис. 1 представлены примеры разбиения ансамбля из $n=6$ элементов на два кластера: (а), (б) кластеры 1 и 2-3-4-5-6; (с), (д) 1-2 и 3-4-5-6; (е), (ф) – два кластера, в каждом из которых по три элемента: 1-2-3 и 4-5-6. Фазовые портреты в проекции (x_i, x_{i+1}) , иллюстрирующие особенности поведения i -го и $(i+1)$ -го элементов ансамбля, представлены на рисунке под каждой соответствующей парой осцилляторов. Атрактор в виде отрезка прямой $x_i = x_{i+1}$ указывает на полную синхронизацию i -го и $(i+1)$ -го элементов. Из представленных на Рис. 1 атракторов видно, что кластеры по отношению друг к другу могут совершать различные колебания: противофазные [Рис. 1(е)], различные периодические [Рис.1(а), (б), (с), (ф)], а также сложные неперiodические колебания [Рис. 1(д)].

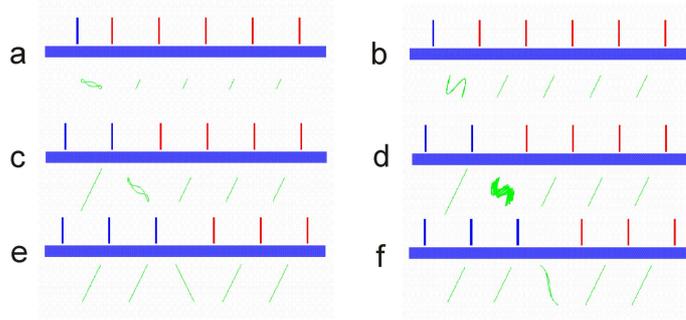


Рис. 1. Примеры разбиения ансамбля из $n=6$ элементов на два кластера. Элементы одного кластера изображены на рисунке одним цветом. Внутри каждого из кластеров элементы полностью синхронизованы.

При $n=2s$ в системе (1) также могут устанавливаться различные режимы полной противофазной синхронизации: $x_{i_1}(t) = \dots = x_{i_s}(t) = -x_{j_1}(t) = \dots = -x_{j_s}(t)$, определяемые локально устойчивыми линейными интегральными многообразиями. В этом случае

$$\omega^2 \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n F(x_i, \dot{x}_i) \equiv 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y} = 0 \quad (3)$$

и все n осцилляторов совершают «собственные» колебания по закону

$$\ddot{x} + \omega^2 x + F(x, \dot{x}) = 0. \quad (4)$$

На рис. 2(а)-(с) представлены примеры разбиения ансамбля на два противофазно синхронизованных кластера: (а) 1-2-5 и 3-4-6; (б) 1-3-5 и 2-4-6; (с) 1-2-3 и 4-5-6. В каждом из кластеров элементы полностью синхронизованы. При этом, всего для ансамбля, состоящего из $n=6$ осцилляторов, существует $N=0.5C_6^3=10$ различных вариантов разбиения на такие кластеры. В случае, когда число элементов в ансамбле нечетно, противофазная синхронизация не устанавливается.

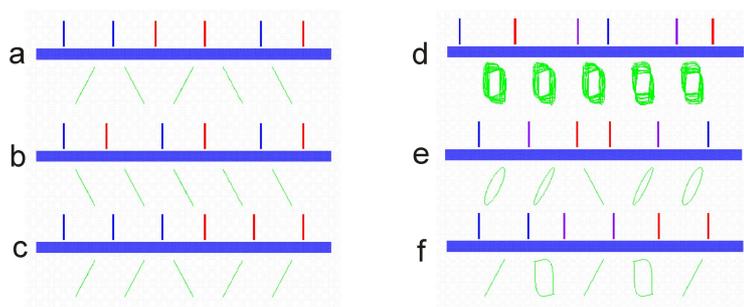


Рис. 2. Примеры разбиения ансамбля из $n=6$ элементов на кластеры.
 (a)-(c) – примеры двух противофазно синхронизованных кластеров;
 (d)-(f) – примеры формирования трех кластеров.

Проведенное в настоящей работе численное исследование поведения системы (1) позволило обнаружить и более сложные синхронные режимы. В частности, примеры разбиения ансамбля, состоящего из $n=6$ элементов, на три различных кластера представлены на рис. 2(d), где кластеры 1-4, 2-6 и 3-5 относительно друг друга совершают сложные неперiodические колебания и рис. 2(f), где кластеры 1-2, 3-4 и 5-6 совершают периодические колебания. В обоих случаях внутри кластеров элементы полностью синхронизованы. На рис. 2(e) показаны три различных пары противофазно синхронизованных элементов: 1-6, 2-5 и 3-4. В этом случае выполняется условие (3) и все осцилляторы совершают колебания по закону (4) с определенным сдвигом фаз.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12-01-00694_a) и Министерства образования и науки РФ (договор № 11.G34.31.0039).

Список литературы:

- [1] Pecora L.M., Carroll T.L. Master stability functions for synchronized coupled systems. //Phys. Rev. Lett. 80, 2109 (1998).
- [2] Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. //Physica D 195, 159 (2004).
- [3] Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems. //Phys. Rev. E 62(5), 6332 (2000).
- [4] Pogromsky A., Santoboni G., Nijmeijer H. Partial synchronization: from symmetry towards stability. //Physica D, 172, 65, (2002).
- [5] Belykh V.N., Pankratova E.V. Chaotic dynamics of two Van der Pol-Duffing oscillators with Huygens coupling. //Regular and Chaotic Dynamics 15(2), 274, (2010).
- [6] Панкратова Е.В., Бельх В.Н. Качественно-численный анализ возможных режимов синхронного поведения двух инерционно связанных осцилляторов Ван дер Поля. //Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика 19(4), 25 (2011).