В.Н. Белых
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

СИНГУЛЯРНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ КОНКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В докладе рассматриваются многомерные сингулярно гиперболические и квазистранные аттракторы. Дается обзор последних результатов по исследованию стационарных режимов конкретных систем, определенных странными аттракторами различных типов.

К сингулярно гиперболическим аттракторам относятся аттракторы Лоренцевского типа как в потоках, так и в каскадах, аттракторы кусочно-гладких отображений и др.. Квазистранные аттракторы реализуются в гладких потоках в виде спирального аттрактора Шильникова, аттрактора типа двойной спирали Чуа, аттракторы типа воронки, траектории которого могут порождать аттрактор Плыкина и др.

В докладе приводятся результаты, касающиеся сингулярно гиперболических аттракторов кусочно-линейной системы и бифуркации сингулярно гиперболических аттракторов отображения с одной кусочно-гладкой нелинейностью. Построены новые типы потоков и каскадов, имеющих квазистранные аттракторы. Приводятся примеры, когда для сингулярных аттракторов отображений строится порождающий их поток.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00964-а)

Е.А. Дунцева
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ МАТРИЧНОГО МЕТОДА КВАЗИОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Построен непрерывный аналог матричного метода квазиобращения для гиперболического уравнения, получены достаточные условия сходимости метода.

Пусть $u(x,t)$ – решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t\in (0,T),\ x\in (0,l) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(x,0)=u_0(x),\ u'_t(x,0)=u_1(x),\ u_0 \in C^2([0,l]),\ u_1\in C^1([0,l]), \tag{2}$$

и граничных условиях

$$u(0,t)=u(l,t)=0. \tag{3}$$

Если $u_0(x)$ и $u_1(x)$ удовлетворяют равенствам $u_0(0)=u_0''(0)=u_0(l)=u_0''(l)=0$, $u_1(0)=u_1(l)=0$, то решение задачи (1), (2), (3) при $t>0$ существует и единственно [1].

Ставится задача: для заданных $T>0$, $u(x,T)=u_T(x)$, $u'_t(x,T)=u'_T(x)$ найти $u_0(x)$, $u_1(x)$ такие, что при выбранных начальных условиях решение $u(x,t)$ системы (1), (2), (3) при $t=T$ удовлетворяет равенствам

$$u(x,T)=u_T(x),\ u'_t(x,T)=u'_T(x). \tag{4}$$

Идеальное решение этой проблемы состоит в том, чтобы , решив задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \\ v(x,T) = u_T(x),\ v'_t(x,T) = u'_T(x), \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

положить в (2) $u_0(x)=v(x,0)$, $u_1(0)=v'_t(x,0)$. Но задача (5) поставлена некорректно [3], то есть решение (5) может не существовать при $t=0$ для достаточно широкого класса функций $u_T(x)$, $u'_T(x)$.

Для подбора начальных или граничных условий таким образом, чтобы к моменту $t=T$ система находилась в состоянии, удовлетворяющем равенствам (4), в [3] предлагаются различные варианты методов квазиобращения с дискретным параметром регуляризации .

Следуя рассмотренному в [3] матричному методу квазиобращения, перепишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Положив $z=(u,v)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -\partial/\partial x \\ -\partial/\partial x & 0 \end{pmatrix}$, получим матричное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} + Az = 0. \tag{6}$$

Вместо рассмотренных в [3] методов квазиобращения с дискретным параметром регуляризации для решения (6) применим непрерывный аналог метода квазиобращения из [2], то есть будем решать задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z_\alpha(x,t)}{\partial t} + Az_\alpha(x,t) - \alpha(t)A^2 z_\alpha(x,t) = 0, \\ z_\alpha(x,T) = z_T(x), \end{cases} \tag{7}$$

где $\alpha(t)$ – непрерывная дифференцируемая на [0,T] функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_{t_0}^{T} \alpha(\tau)d\tau > 0,\ 0 < t_0 < T,\ \lim_{t_0 \to 0} \int_{t_0}^{T} \alpha(\tau)d\tau = 0.$$

Пусть $z_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)$. Тогда в развёрнутом виде уравнение (7) можно переписать в форме системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \dfrac{\partial v_\alpha}{\partial x} - \alpha(t)\dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x} - \alpha(t)\dfrac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$$

Исключая v_α, получаем регуляризованную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} - \alpha'(t)\dfrac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} - 2\alpha(t)\dfrac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^2 \partial t} + \alpha^2(t)\dfrac{\partial^4 u_\alpha}{\partial x^4} = 0, \\ u_\alpha(x,T) = u_T(x),\ \dfrac{\partial u_\alpha(x,T)}{\partial t} = u'_T(x)\ ,\ u_\alpha(0,t) = u_\alpha(l,t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Доказано [2], что решение $z_\alpha(x,t)$ задачи (7) существует для достаточно широкого круга функций $z_T(x)$, а решение уравнения (6) с начальным условием $z_0(x)=z_\alpha(x,t_0)$, $0<t_0<T$, при $t=T$ сходится к заданной функции $z_T(x)$ при $t_0\to 0$.

Следовательно, решив задачу (8), а затем положив в (2) $u_0(x)=u_\alpha(x,t_0)$, $u_1(x)=\dfrac{\partial u_\alpha(x,t_0)}{\partial t}$, $0<t_0<T$, получим решение системы (1), (2), (3), которое при при $t_0\to 0$ сходится к решению, удовлетворяющему условию (4).

Преимущество предлагаемого непрерывного метода состоит в том, что для получения лучших приближений к решению исходной задачи (1), (3), (4) здесь при численной реализации метода следует сделать несколько шагов по времени в регуляризованной задаче (8) вместо того, чтобы, как в случае метода с дискретным параметром регуляризации, решать регуляризованную задачу Коши при некотором новом значении параметра регуляризации.

Список литературы:

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 398 с.

[2] Дунцева Е.А. Некоторые непрерывные и итеративные методы решения некорректных задач: Диссертация к.ф.-м.н. – Нижний Новгород, 2000. – 107 с.

[3] Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 336 с.

О.Н. Кащеева

ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

О СИСТЕМАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ SU(4)/S(U(2)×U(2))

В работе построено представление Лакса для двух систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Запишем структурные уравнения симметрического пространства SU(4)/S(U(2)×U(2)) в виде

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega \quad (1)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} i(\theta^3-\theta^7)/2 & (-\theta^1+i\theta^2)/2 & \varphi^1+i\psi^1 & \varphi^2+i\psi^2 \\ (\theta^1-i\theta^2)/2 & i(-\theta^3-\theta^7)/2 & \varphi^3+i\psi^3 & \varphi^4+i\psi^4 \\ -\varphi^1+i\psi^1 & -\varphi^3+i\psi^3 & i(\theta^6+\theta^7)/2 & (-\theta^4+i\theta^5)/2 \\ -\varphi^2+i\psi^2 & -\varphi^4+i\psi^4 & (\theta^4+i\theta^5)/2 & i(-\theta^6+\theta^7)/2 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\theta^1 = \left(-cosU^2U_y^3 - sinU^2 sinU^3 U_y^1\right)dy, \qquad \theta^4 = (-cosU^5U_x^6 - sinU^5 sinU^6 U_x^4)dx,$$

$$\theta^2 = \left(sinU^3 cosU^2 U_y^1 - sinU^2 U_y^3\right)dy, \qquad \theta^5 = (sinU^6 cosU^5 U_x^4 - sinU^5 U_x^6)dx, \quad (2)$$