***Е.А. Андронова***
*ФБОУ ВПО «ВГАВТ»*

# О БИФУРКАЦИОННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

В настоящей работе рассматривается квадратичная система с трехкратным фокусом или центром в начале координат. Такая система может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + kx^2 + 5axy + ny^2 \\ \dot{y} = x + ax^2 + (3k+5n)xy. \end{cases} \tag{1}$$

Первая и вторая ляпуновские величины, вычисленные в точки (0,0) для системы (1) имеют нулевые значения, а третья $\overline{\upsilon}_7$ определяется выражением

$$\overline{\upsilon}_7 = (25\pi/32)[3(k+2n)(k+n)^2 - a^2(5k+6n)](2a^2+2n^2+kn).$$

Если ни одна из величин

$$a, \qquad 3(k+2n)(k+n)^2 - a^2(5k+6n), \qquad 2a^2+2n^2+kn \tag{2}$$

не обращается в нуль, то в начале координат система (1) имеет трехкратный фокус. Равенство нулю любой из величин в (2) приводит к обращению в нуль $\overline{\upsilon}_7$ и различным случаям центра.

В статье [1] проведено исследование возможных топологических структур системы (1) и построено разбиение пространства параметров. Основой для такого построения послужили топологические структуры, соответствующие случаям центра (2), а так же тот факт, что вокруг трехкратного фокуса предельные циклы существовать не могут [2]. Кроме того, для доказательства существования или отсутствия предельного цикла вокруг второго фокуса в точке $C(0,\frac{1}{n})$ использовались прямая и гипербола без контакта. В итоге было установлено, что у системы (1) в пространстве параметров $a,n,k$ имеется десять бифуркационных поверхностей. Вопрос, оставшийся открытым, касается десятой поверхности, соответствующей бифуркации образования сепаратрисного цикла, охватывающего точку $C(0,\frac{1}{n})$ и содержащего часть дуги экватора. Расположение этой поверхности, а так же определяющие ее условия имеют принципиальное значение, так как именно она выделяет в пространстве параметров системы (1) области, вблизи которых могут существовать квадратичные системы с максимальным числом предельных циклов. На сегодняшний день это число равно четырем.

Настоящая работа является дополнением к статье [1] и посвящена изучению бифуркационной поверхности сепаратрисного цикла, окружающего точку $C(0,\frac{1}{n})$.

Введем следующие обозначения, следуя статье [1]:

$D = -125a^4 - (262n^2 + 170kn + 25k^2)a^2 - (2k+5n)^3 = 0$ – уравнение бифуркационной поверхности образования сложной особой точки на экваторе сферы

Пуанкаре; $\Phi(a,n,k)=0$ – уравнение бифуркационной поверхности образования сепаратриснонго цикла (которое нам не известно).

Доказана справедливость следующих утверждений:

1) Поверхность образования сепаратрисного цикла $\Phi(a,n,k)=0$ располагается в области, где выполняется неравенство $D \le 0$.

2) Бифуркационные поверхности $D=0$ и $\Phi(a,n,k)=0$ пересекаются по двум прямым, каноническое уравнение которых имеет следующий вид $\dfrac{a}{\pm(12\sqrt{5})}=\dfrac{n}{-5/12}=\dfrac{k}{1}$.

3) В точках пространства параметров, соответствующих пересечению поверхностей $D=0$ и $\Phi(a,n,k)=0$ у системы (1) имеет место топологическая структура с сепаратрисным циклом, охватывающим точку $C(0,\dfrac{1}{n})$ и содержащим седло и седло-узел на экваторе сферы Пуанкаре.

Проведенные исследования позволяют сформулировать следующее предположение:

Существуют малые добавки к коэффициентам системы (1), такие что измененная (возмущенная) система, полученная из системы (1), будет в итоге иметь четыре предельных цикла с распределением (3, 1) с двумя особыми точками седло и седло-узел на экваторе сферы Пуанкаре. При этом параметры $a,n,k$ должны соответствовать внутренним точкам области, ограниченной поверхностью $\Phi(a,n,k)=0$. Изменение коэффициентов системы (1), которые приводят к появлению еще трех циклов в начале координат, описаны в различных публикациях, в частности в статье [3].

**Список литературы:**

[1] Андронова Е.А. Разбиение пространства параметров квадратичной системы с трехкратным фокусом или центром в начале координат. Дифференц. уравнения. 1998. Т.34. №4. С. 441–450.

[2] Черкас Л.А. Отсутствие предельных циклов вокруг трехкратного фокуса в квадратичной системе на плоскости. Дифференц. уравнения. 1986. Т.22. №11. С. 2015–2017.

[3] Qin Y., Shi S., Cai B. On limit cycles of planar quadratic systems. Scientia Sinica. 1982. V.26. №1. P. 41–50.

***В.Н. Белых***
*ФБОУ ВПО «ВГАВТ»*

# СЛОЖНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ С ОДНИМ СОСТОЯНИЕМ РАВНОВЕСИЯ

Динамические системы с единственным состоянием равновесия часто встречаются в различных приложениях как дифференциальные уравнения равновесных состояний. В теории автоматического управления, например, такой системой является система с одной нелинейностью, а в качестве основной задачи выступает классическая задача об абсолютной устойчивости состояния равновесия. В динамике нейрона напротив единственное состояние равновесия всегда неустойчиво, и «рабочему» стационарному режиму соответствует предельный цикл. При изменении параметров в системах с единственным равновесием, в том числе и в случае двух приведенных