ситуация: волны ТЕ типа прямые, а ТМ – обратные.

Таким образом, основное отличие в дисперсионных свойствах цилиндрических и плоских структур заключается в том, что в области исследуемых значений параметров цилиндрические структуры в азимутально симметричном случае могут поддерживать только прямые поверхностные волны, а вдоль плоских композитных слоев могут распространяться как прямые, так и обратные волны ТМ и ТЕ типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-02-97035).

Список литературы:

[1] Ilin N.V., Smirnov A.I., Kondratiev I.G. 2009, Features of surface modes in metamaterial layers, Metamaterials V. 3. с. 82–89.

Е.Н. Мясников
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ДРЕЙФОВАЯ ВОЛНА В ДВУХЖИДКОСТНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Введение

Вращение частиц среды в гидродинамике может приводить к развитию гиротропной турбулентности, которая обладает рядом свойств, принципиально отличающих её от возмущений другого типа. Как показывает анализ существующих в настоящее время физических моделей, необходимыми условиями для развития гиротропной турбулентности являются два фактора – дифференциальное вращения среды и антисимметрия возмущений относительно направления вращения, которые создают условия для взаимодействия тороидальных и полоидальных вихревых полей. В задачах, связанных с динамикой магнитоактивной плазмы, особую роль играет вращение частиц в магнитном поле, в частности при исследовании поведения ϑ -пинча – сильно вытянутого сгустка плазмы, ось которого наклонена под углом θ к регулярному магнитному полю $\vec{B}_0$, было обнаружено, что его вращение может существенно замедлять разлет плазмы вдоль магнитного поля, а также приводить к неустойчивости .

Магнитоактивная плазма является гиротропной средой, в которой направление момента плотности импульса определяется гировращением наиболее тяжелой – ионной компоненты. В работах [1, 2] было показано, что в условиях верхней ионосферы вращение неоднородностей плотности плазмы сопровождается генерацией индукционного электрического поля, которое может приводить к установлению более медленного режима двуполярной диффузии, зависящего только от двух амбиполярных коэффициентов – ионного продольного к полю $\vec{B}_0$ и электронного поперечного.

В настоящей работе получено волновое решение системы уравнений двухжидкостной МГД, которое удовлетворяет однородному уравнению Шредингера и описывает вращение возмущений концентрации в однородной магнитоактивной плазме низкого давления. Показано, что данное решение может быть реализовано только для отрицательных возмущений электронной концентрации и может приводить к развитию вращательно неинвариантной (гиротропной) турбулентности.

Уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики

Система уравнений, которая описывает двухкомпонентную квазинейтральную плазму, находящуюся в однородном магнитном поле, включает уравнения непрерывности и движения для электронов и ионов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + divn\vec{\upsilon}_\alpha = 0; \; m_\alpha \frac{\partial \vec{\upsilon}_\alpha}{\partial t} = e_\alpha \vec{E} + \frac{e_\alpha}{c}[\vec{\upsilon}_\alpha \times \vec{B}_0] - \frac{\nabla p_\alpha}{n} - \frac{\nu_{ei} m_e}{e_\alpha n}\vec{j} \; ; \qquad (1,2)$$

и уравнения для индукционного электрического и магнитного полей

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = rot\vec{E} \; ; \; rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \qquad (3,4)$$

Здесь введены следующие обозначения: e_α – заряд иона ($\alpha = i$) и электрона ($\alpha = e$), n – концентрация, $\vec{\upsilon}_\alpha$ – скорости заряженных частиц, ν_{ei} – эффективная частота соударений заряженных частиц между собой, $p_\alpha = nT_\alpha$ – газокинетическое давление электронной и ионной компонент, T_α – температуры, выраженные в энергетических единицах, $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{j} = en(\vec{\upsilon}_i - \vec{\upsilon}_e)$ – векторы напряженности электрического, индукции магнитного полей и плотности тока, $\vec{B}_0$ – индукция внешнего однородного магнитного поля. Будем рассматривать холодную сильно замагниченную плазму, в которой: газокинетическое давление значительно меньше плотности энергии магнитного поля

$$\beta = 8\pi \, n(T_e + T_i) \big/ B_0^2 << 1 \, ,$$

частота соударений частиц $\nu_{ei} << \omega_{Bi} << \omega_{Be}$ много меньше гирочастот $\omega_{B\alpha} = \dfrac{eB_0}{m_\alpha c}$ электронов и ионов.

Условие равновесия плазмы в магнитном поле

Как известно, при $\vec{\upsilon}_\perp << c$ электрическое поле $\vec{E}_\perp$ в лабораторной системе отсчета связано с полем $\vec{E}'_\perp$ в локальной, движущейся вместе с проводящей средой, системе координат преобразованием Лоренца

$$\vec{E}'_\perp = \vec{E}_\perp + \frac{1}{c}\left[\upsilon_\perp \times \vec{B}_0\right]. \qquad (5)$$

Выразив поле $\vec{E}_\perp$ из (5) и подставив его в (3), приходим к уравнению электромагнитной индукции в приближении двухжидкостной магнитной гидродинамики (МГД)

$$\frac{\partial \vec{B}_\perp}{\partial t} - rot\left[\vec{\upsilon}_\perp \times \vec{B}_0\right] = -crot\vec{E}'_\perp + D_B \Delta \vec{B}_\perp \qquad (7)$$

Здесь $D_B = \dfrac{c^2}{4\pi\sigma_{e\|}}$ – коэффициент диффузии магнитного поля, где $\sigma_{e\|}$ – проводимость плазмы, $\vec{\upsilon}_\perp$ – скорость движения проводящей среды.

В приближении одножидкостной МГД дрейфовые скорости электронной и ионной компонент совпадают

$$\vec{\upsilon}_{\perp} = \vec{\upsilon}_{i\perp} = \vec{\upsilon}_{e\perp} = \frac{c[\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}_0]}{B_0^2}, \tag{8}$$

И скорость ионной компоненты удовлетворяет уравнению

$$4\pi m_i n \frac{\partial \vec{\upsilon}_{\perp}}{\partial t} - [rot\vec{B}_{\perp} \times \vec{B}_0] = 0\,. \tag{9}$$

В идеальной плазме $\vec{E}'_{\perp} = 0$, и система уравнений (5), (3) имеет решение в виде альвеновской волны, которая для возмущений вида $\exp\{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}\}$ удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$c_A = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{n_A} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi m_i n}}\,,$$

где n_A – показатель преломления, $k_z = k\sin\theta$ – проекция вектора $\vec{k}$ на магнитное поле $\vec{B}_0$, которое считается направленным вдоль оси z. Между направлениями возмущений полей выполняются следующие поляризационные соотношения:

$\vec{\upsilon}_{\perp} \parallel \vec{B}_{\perp}$; $\vec{\upsilon}_{\perp} \parallel \vec{E}_{\perp}$, $\vec{B}_{\perp} \perp \vec{E}_{\perp}$, причем вектор $\vec{E}_{\perp}$ лежит в плоскости, образованной векторами $\vec{k}$ и $\vec{B}_0$. В идеальной плазме ($D_B \to 0$) выполняется теорема о «вмороженности» магнитного поля в проводящую среду, согласно которой сохраняется поток магнитного поля через произвольный замкнутый контур, движущейся вместе со средой. Альвеновская волна является электромагнитной, и возмущения концентрации плазмы в ней отсутствуют.

Рассмотрим условие равновесия плазмы в приближении двухжидкостной МГД, согласно которому плотность силы Ампера, возникающая при протекании диамагнитного тока

$$\vec{j}_{\perp} = en(\vec{\upsilon}_{i\perp} - \vec{\upsilon}_{e\perp}) = \frac{c(T_e + T_i)}{B_0^2}\left[\vec{B}_0 \times \nabla n\right], \tag{10}$$

уравновешивает градиент поперечного к $\vec{B}_0$ газокинетического давления плазмы. Диамагнитный ток (10) может играть роль сторонней силы (эдс), которая возникает в проводнике с током, помещенном во внешнее магнитное поле, и вызывает известный эффект Холла.

Для определения электрического поля воспользуемся стационарным уравнением движения электронной компоненты, которое в приближении двухжидкостной магнитной гидродинамики МГД выполняет роль обобщенного закона Ома (см. [3])

$$T_e \nabla n = -en\vec{E} - \frac{en}{c}\left[\vec{\upsilon}_{e\perp} \times \vec{B}_0\right]. \tag{11}$$

Проекция уравнения (11) на направление $\vec{B}_0$ определяет самосогласованное потенциальное электрическое поле

$$\vec{E}_p = -\nabla\varphi = -\frac{T_e}{en}\nabla n\,, \tag{12}$$

которое обеспечивает выполнение условия квазинейтральности плазмы.

Взяв проекцию уравнения (11) на направление, ортогональное $\vec{B}_0$, подставив в него поле (12), получим выражение для индукционного электрического поля

$$\vec{E}'_{\perp} = -\frac{1}{c}\left[\vec{\upsilon}_{e\perp} \times \vec{B}_0\right] = \frac{1}{cen}\left[\vec{j}_{\perp} \times \vec{B}_0\right] = \frac{(T_e + T_i)}{e}\frac{\nabla_{\perp} n}{n} . \tag{13}$$

Электрическое поле (13) поляризовано строго ортогонально к $\vec{B}_0$ и имеет вихревую компоненту, которая должна удовлетворять уравнению (7). В двухжидкостном приближении условие (8) нарушается, поскольку в системе отсчета, движущейся вместе с проводящей средой $\vec{\upsilon}_{\perp} = \vec{\upsilon}_{i\perp}$, всегда существует диамагнитный ток $\vec{j}_{\perp} = -en\vec{\upsilon}_{e\perp}$ который и вызывает индукционное поле (13).

Если декремент диффузии магнитного поля в плазму значительно превышает диффузионные декременты возмущений концентрации, то уравнение (7) имеет стационарное решение

$$rot\left[\vec{\upsilon}_{i\perp} \times \vec{B}_0\right] = c\,rot\vec{E}'_{\perp} . \tag{14}$$

Условие квазистатического равновесия (14) реализуется в случае, когда плотность диамагнитного тока и дрейфовая скорость ионной компоненты связаны соотношением $\vec{j}_{\perp} = en\vec{\upsilon}_{i\perp}$, а скорость электронной компоненты в лабораторной системе координат обращается в нуль $\vec{\upsilon}_{e\perp} = 0$ (электронная компонента «вморожена» в поле $\vec{B}_0$). Отметим, что уравнение (14) имеет проекции только на плоскость, ортогональную $\vec{B}_0$. В этом случае проекция вихря дрейфовой скорости на направление регулярного магнитного поля (ось z) определяет частоту дифференциального вращение возмущения плотности плазмы

$$\left(rot\vec{\upsilon}_{i\perp}\right)_z = \omega_{iz} = \frac{c(T_e + T_i)}{eB_0}\frac{\Delta_{\perp} n}{n}. \tag{15}$$

Поскольку магнитоактивная плазма является диамагнитной средой, то дрейфовое вращение ионной компоненты, определяющей плотность диамагнитного тока, должно иметь левовинтовое по отношению к полю $\vec{B}_0$ направление, которое совпадает с направлением вращения положительно заряженного иона в магнитном поле.

Согласно критерию, предложенному Кадомцевым [3], для возникновения вращения плазмы ϑ-пинча – сильно вытянутого сгустка плазмы, ось которого наклонена под углом $\theta << 1$ к полю $\vec{B}_0$, необходимо, чтобы плотность энергии поперечной к оси ϑ-пинча компоненты магнитного поля $B_0^2 \sin^2\theta / 8\pi$ превышала плотность кинетической энергии вращения ионов $nm\upsilon_{i\perp}^2 / 2$.

При $\sin\theta \approx l_{\perp} / l_z << 1$ данное условие эквивалентно соотношению $l_{\perp} > \sqrt{r_B l_z}$, где $r_B = n_A \dfrac{(T_e + T_i)}{eB_0}$ – внутренний масштаб возмущений плотности плазмы, который характеризует степень «вмороженности» электронной компоненты в поле $\vec{B}_0$.

Магнитогидродинамическая дрейфовая волна

Предположим, что движение возмущений плотности плазмы в лабораторной системе отсчета будет описываться уравнениями (8), в котором роль динамо-поля $\vec{E}_{\perp}$ будет выполнять индукционное поле (13) и вызывать вращение возмущения плотности плазмы с дрейфовой частотой $\vec{\omega}$. При этом электронная компонента уже не оказывается “вмороженной” в поле $\vec{B}_0$, а определяет плотность диамагнитного тока $\vec{j}_\perp = -en\vec{\upsilon}_{e\perp}$ в системе отсчета, связанной с неподвижным возмущением плотности плазмы ($\vec{\upsilon}_\perp = \vec{\upsilon}_{i\perp}$).

Рассмотрим возмущения плотности плазмы $\delta n = (n - n_0)/n_0 << 1$ относительно стационарного однородного значения концентрации n_0=const вида плоских волн $\propto \exp\{i\vec{k} \cdot \vec{r}\}$ и исследуем возможность образования волновых структур в приближении двухжидкостной МГД.

Полная система уравнений, описывающих возмущения спектральных компонент гидродинамических $\vec{\upsilon}_{k\perp}$, $\vec{\omega}_{k\theta}$ и электромагнитных $\vec{E}'_{k\perp}$, $\vec{j}_{k\perp}$, $\vec{B}_{k\theta}$ полей имеет вид:

$$\vec{\upsilon}_{k\perp} = \vec{\upsilon}_\perp \cdot \delta n_k = -i\frac{c(T_e + T_i)}{eB_0^2}[\vec{B}_0 \times \vec{k}] \cdot \delta n_k\,; \tag{16}$$

$$\vec{\omega}_{k\theta} = \vec{\omega}_\theta \cdot \delta n_k = \frac{cn(T_e + T_i)}{B_0^2}[\vec{k} \times [\vec{B}_0 \times \vec{k}]] \cdot \delta n_k\,;$$

$$\vec{E}'_{k\perp} = \vec{E}'_\perp \cdot \delta n_k = i\vec{k}_\perp \frac{c(T_e + T_i)}{e} \cdot \delta n_k\,;$$

$$\vec{j}_{k\perp} = \vec{j}_\perp \cdot \delta n_k = i\frac{cn(T_e + T_i)}{B_0^2}[\vec{B}_0 \times \vec{k}] \cdot \delta n_k\,;$$

$$\vec{B}_{k\theta} = \vec{B}_\theta \cdot \delta n_k = -\frac{4\pi n(T_e + T_i)}{B_0^2}\frac{[\vec{k} \times [\vec{B}_0 \times \vec{k}]]}{k^2} \cdot \delta n_k\,.$$

Здесь волновой вектор $\vec{k}$ составляет угол θ с нормалью к полю $\vec{B}_0$, вместе они образуют плоскость, в которой лежат вектора $\vec{E}'_{k\perp}$, $\vec{\omega}_{k\theta}$ и $\vec{B}_{k\theta}$, векторы $\vec{\upsilon}_{k\perp}$ и $\vec{j}_{k\perp}$ ортогональны этой плоскости. Операторы полей в уравнениях (16) удовлетворяют следующим поляризационным соотношениям:

$$\vec{\omega}_\theta \uparrow\downarrow B_\theta\,;\;\; \vec{\upsilon}_\perp \uparrow\downarrow \vec{j}_\perp\,. \tag{17}$$

Операторы вихревых полей $\vec{\upsilon}_\perp$, $\vec{\omega}_\theta$, $\vec{j}_\perp$, $\vec{B}_\theta$ ортогональны волновому вектору $\vec{k}$, поля с индексом «$_\perp$» являются тороидальными, а с индексом «$_\theta$» – полоидальными. Электрическое поле имеет вихревую $E'_\theta = E_\perp \sin\theta$ и потенциальную $E'_p = E_\perp \cos\theta$ компоненты.

Можно показать, что для полей дрейфовой скорости $\vec{\upsilon}_\perp$ и её вихря $rot\vec{\upsilon}_\perp$ выполняется тождество:

$$rot\left[\vec{\upsilon}_\perp \times \vec{B}_0\right] = \left[rot\vec{\upsilon}_\perp \times \vec{B}_0\right] = \left[\vec{\omega} \times \vec{B}_0\right], \tag{18}$$

в результате уравнение (14) принимает вид:

$$\left[\vec{\omega}_k \times \vec{B}_0\right] = -\frac{c(T_e + T_i)}{e}[\vec{k} \times \vec{k}_\perp]\,. \tag{19}$$

При выполнении условий (17) уравнение (19) имеет решение только в том случае, когда проекция оператора дрейфовой частоты на направление магнитного поля $\vec{B}_0$ имеет отрицательный знак, то есть вращение возмущения плазмы происходит в левовинтовом по отношению к полю $\vec{B}_0$ направлении. Следовательно согласно (17) в области возмущения концентрации проекция $B_{z\theta}$ имеет положительный знак и результирующее магнитное поле усиливается. Последнее может быть выполненным только в случае, когда возмущение плотности плазмы отрицательно $\delta n < 0$.

В локальной (лагранжевой) системе отсчета уравнение электромагнитной индукции (3) может быть записано в виде (см. [1], [2]):

$$\frac{dB'_y}{dt} = B'_{0x}\frac{d\psi_z}{dt} = -ickE'_x \sin\theta\,; \tag{20),}$$

$$\frac{dB'_x}{dt} = B'_{0y}\frac{d\psi_z}{dt} = -ickE'_y \sin\theta\,, \tag{21}$$

где $B'_{0x} = B'_{0y} = B_0 \sin\theta$ – проекция $\vec{B}_0$ на направление $\vec{k}$, $\frac{d\psi_z}{dt} = \omega_z$ – проекция оператора частоты дифференциального вращения возмущения плазмы на ось z.

Подставляя поле (13) в уравнения (20), (21) и усредняя их в плоскости ($x \cdot y$) с учетом того, что возмущения плазмы изотропны в этой плоскости $k_x^2 \approx k_x^2 \approx k_\perp^2/2$, получим следующее выражение для проекции оператора вращения на ось z.

$$\omega_z = \frac{c(T_e + T_i)}{2eB_0}k_\perp^2\,; \tag{22}$$

Как известно, дисперсионному уравнению (22) отвечает однородное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi_z}{\partial t} = -\frac{c(T_e + T_i)}{2eB_0}\Delta_\perp\psi_z\,. \tag{23}$$

Уравнение (23) описывает по отношению к направлению поля $\vec{B}_0$ решение, отвечающее дрейфовой МГД-волне, в которой проекция вектора $\vec{k}_\perp$ на плоскость, ортогональную $\vec{B}_0$, вместе с соответствующими проекциями полей (16) совершает дифференциальный поворот на угол $\psi_z = \delta n$ с частотой порядка дрейфовой (22).

Список литературы:

[1] Ерухимов Л.М., Мясников Е.Н. \\ Известия вузов Радиофизика. Т. 41. С. 194–211, 1998.
[2] Мясников Е.Н. \\ Известия вузов Радиофизика. Т. 42. С. 691–699, 1999.
[3] Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. – М.: Наука, 1988.