

Список литературы:

- [1] Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации. М.: Связь, 1979
- [2] Белых В.Н. Модели дискретных СФС и их исследование/ В кн. Системы фазовой синхронизации / Под ред В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной. – М.: Радио и связь, 1982, с. 161–162.
- [3] Чириков Б.В. Нелинейные резонансы. – Учебное пособие. Новосибирск.: НГУ, 1977, 305 с.
- [4] Лихтенберг А. и Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир. –528 с.
- [5] Лебедева Л.В. О фазовых картинах стандартного отображения тора // Прикладная нелинейная динамика, Т.4. №4,5, Саратов, 1996, с. 21–29.
- [6] Lebedeva L.V. Bifurcation Sequence of One Cylinder Map // International Conference on CONTEMPORARY PROBLEMS in THEORY of DYNAMICAL SYSTES (CPTDS’96) Abstracts, Nizhny Novgorod, Russia, 1996
- [7] Лебедева Л.В. Неподвижные точки стандартного отображения тора //Тезисы докладов научно-техн. конф. ВГАВТ, Н.Новгород , 2000
- [8] Lebedeva L.V. Bifurcation Sequence of Cylinder Map // International Congress on Mathematical Modeling Sept. 20-26, 2004 Nizhny Novgorod // Russia Book of Abstracts, University of Nizhny Novgorod, 2004
- [9] Лебедева Л.В. Сложная динамика импульсной системы фазовой синхронизации // Материалы VII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», 1–6 октября 2004 г. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2004.
- [10] Лебедева Л.В. Изолированные области в фазовом пространстве стандартного отображения тора // Материалы VII международной школы «Хаотические автоколебания и образование структур», 10–16 октября 2007 г. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2007.
- [11] Лебедева Л.В. Стандартное отображение тора: область притяжения главного резонанса // Тезисы докладов научно-техн. конф. ВГАВТ, Н.Новгород , 2010 г.

И.А. Мордвинкина, В.Н. Белых
 ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ
 ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ**

В докладе рассматривается динамическая система, имеющая в правой части гладкие функции. Доказывается, что если кривая есть замкнутая кривая, охватывающая точку $O(0;0)$, то система имеет предельный цикл.

Проводится качественное исследование динамической системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y - \lambda_1 f(x, y)H_x, \\ \dot{y} = -H_x - \lambda_2 f(x, y)H_y, \end{cases} \quad (1)$$

где правые части системы предполагаются гладкими функциями, λ_1, λ_2 – неотрицательные параметры. Обозначим

$$F_{11} = H_y - \lambda_1 f(x, y)H_x, \quad F_{12} = -H_x - \lambda_2 f(x, y)H_y$$

и

$$F_1(x, y) = \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \end{pmatrix}$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ система (1) – это гамильтова система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y, \\ \dot{y} = -H_x, \end{cases} \quad (1)$$

где $H(x,y) = h = \text{const}$ – интеграл этой системы. $H(x,y) = h$ есть семейство замкнутых кривых, охватывающих единственное состояние равновесия в точке $O(0;0)$ типа центр (см. рис 1).

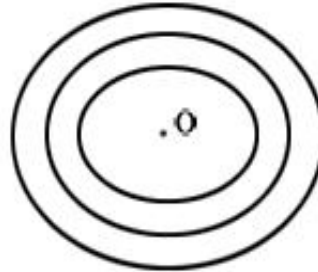


Рис. 1

Рассмотрим градиентную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -H_x, \\ \dot{y} = -H_y. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим $F_{21} = -H_x$, $F_{22} = -H_y$ и $F_2(x,y) = \begin{pmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix}$

Так как $\dot{H} = -(H_x^2 + H_y^2) < 0$, то в точке $O(0;0)$ система имеет глобально устойчивое состояние равновесия типа узел (см. рис. 2).

На интегральных кривых J системы (2) векторное поле ориентировано в соответствии с векторным произведением:

$$F_1 \times F_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} \left((H_x^2 + H_y^2) + (\lambda_2 - \lambda_1) f(x,y) H_x H_y \right)$$

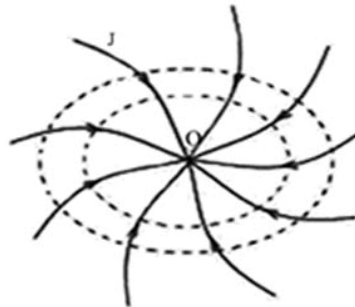


Рис. 2

Рассмотрим квадратичную форму

$$(H_x^2 + H_y^2) + (\lambda_2 - \lambda_1) f(x,y) H_x H_y$$

и будем считать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} f(x, y) \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} f(x, y) & 1 \end{vmatrix} > 0, \text{ то есть } 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} f^2(x, y).$$

Тогда квадратичная форма положительно определена. В этом случае векторное поле направлено в одну сторону и кривые системы (2) при этом являются кривыми без контакта для векторного поля (1). Это означает, что кривые системы (1) порождают одномерное точечное отображение любой кривой системы (2) в себя.

Теорема 1. Если кривая $l = \{x, y | f(x, y) = 0\}$ есть замкнутая кривая, охватывающая точку $O(0; 0)$, то система (1) имеет предельный цикл.

Доказательство. Считаем, что $f(x, y) < 0$ – внутренность кривой

$l = \{x, y | f(x, y) = 0\}$, а $f(x, y) > 0$ – внешность. Найдутся две замкнутые кривые $H = h_1$ и $H = h_2$ образующие кольцо R , такое, что $l \subset R$, и $\dot{H}|_{H=h_1} < 0$, $\dot{H}|_{H=h_2} > 0$ (см. рис. 3).

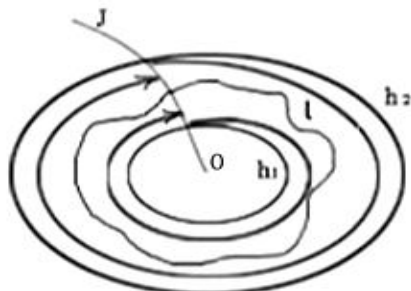


Рис. 3

Производная функции $H(x, y)$ в силу системы (1)

$$\dot{H} = -\lambda(H_x^2 + H_y^2)f(x, y) \quad (3)$$

Тогда получаем, что $\dot{H}|_{H=h_1} < 0$, $\dot{H}|_{H=h_2} > 0$. Следовательно, траектории системы (1) переводят кольцо R внутрь, и отображение интегральной кривой системы (2) в себя имеет неподвижную точку, соответствующую предельному циклу системы (1). Вне кольца R система циклов не имеет. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00694).

Список литературы:

- [1] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967.
- [2] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1990.