В.Н. Белых
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

СПИРАЛЬНЫЕ И ДИКИЕ АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим динамическую систему, имеющую седло-фокусное состояние равновесия с ведущими характеристическими показателями $p_{1,2}= -\nu \pm i\omega$, $p_3= 1$, которое для некоторого параметра μ=0 имеет две симметричные гомоклинические орбиты. Нормальная форма отображения для бифуркации гомоклинических орбит имеет вид [1–3]:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi} &= -\pi/2 + \left(\pi/2 + a_1 |x|^{\nu} \cos(\varphi - \omega \ln|x|)\right) \operatorname{sign} x, \\ \overline{x} &= \mu \operatorname{sign} x + a_2 |x|^{\nu} \sin(\varphi - \omega \ln|x|), \\ \overline{y} &= a_3 \operatorname{sign} x + L(x) y, \end{aligned} \tag{1}$$

где $|x|<1$, $\varphi \in S^1$, $y \in R^n$, $\|L(x)\|<\nu$, a_j, j=1, 2, 3 – постоянные величины.

Теорема [1–3]: Если ν<1/2, то отображение (1) имеет дикий аттрактор.

Дикий аттрактор определяет хаотическую динамику системы со сложными статистическими свойствами. Приводятся примеры конкретных систем дифференциальных уравнений, предельным множеством траекторий которых служит дикий аттрактор.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00694).

Список литературы:

[1] Belykh V.N., Chua L.O. New type of strange attractor from a geometric model of Chua's circuit. Int. Journal of Bifurcations and Chaos, V.2, N. 3, p. 697–704 (1992).
[2] Belykh V.N. Homoclinic and heteroclinic linkages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps. Advances in the Mathematical Sciences, American Math. Soc. Translations, Series 2, vol. 200, p. 51–62 (2000).
[3] Turaev D.V., Shilnikov L.P. An example of wild strange attractor. Math. Sb., V. 189, N. 2, pp. 137–160 (1998).

Е.А. Дунцева
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ МОНОТОННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В гильбертовом пространстве для уравнения с многозначным максимальным монотонным оператором построен итеративный метод первого порядка, получены достаточные условия сильной сходимости метода к решению исходной задачи. Библ.5.

В вещественном гильбертовом пространстве H рассмотрим операторное уравнение

$$Ax + Bx = f\,, \tag{1}$$

решение которого понимается в смысле включения

$$f - Ax \in Bx, \tag{2}$$

$A: H \to H$ – однозначный оператор, обладающий свойствами:

$$(Au - Av, u - v) \geq M \| u - v \|^2 \quad \forall u, v \in H, M > 0, \tag{3}$$

$$\| Au - Av \| \leq L \| u - v \| \quad \forall u, v \in H, L > 0, \tag{4}$$

$B: H \to 2^H$ – многозначный максимальный монотонный оператор.

При наложенных на операторы A и B условиях уравнение (1) однозначно разрешимо (см. [1, с. 123]).

Для решения (1) в [2] построен непрерывный метод первого порядка (см., например, [3], [4]), сводящийся к решению задачи Коши для дифференциального уравнения следующего вида (см. [2, с. 1242]):

$$u'(t) + u(t) = I_B^{\gamma(t)}(u(t) - \gamma(t)[Au(t) - f]), \tag{5}$$

$$u(t_0) = u_0 \in H, \tag{6}$$

установлено существование единственного решения $u(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ задачи Коши (5), (6), получены достаточные условия сходимости $u(t)$ при $t \to \infty$ по норме пространства H к единственному решению уравнения (1) (см. [2], [5]).

Здесь

$$I_B^{\gamma(t)} = (E + \gamma(t)B)^{-1} :$$

$H \to H$ – резольвента оператора B, которая является однозначным оператором,
E – единичный оператор в H,
$\gamma(t)$ – непрерывная функция при $t \geq t_0 > 0$, причём

$$0 < \gamma(t) \leq \gamma_0 \quad \forall t \geq t_0. \tag{7}$$

Построим разностный аналог метода (5), (6) следующего вида:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + u_{n+1} = I_B^{\gamma_n}(u_{n+1} - \gamma_n[Au_{n+1} - f]), \; n=1,2,\ldots, \tag{8}$$

здесь элемент $u_1 \in H$, задаётся, $\{\tau_n\}$,$\{\gamma_n\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел, оператор $I_B^{\gamma_n} = (E + \gamma_n B)^{-1}$.

Перейдём от (8) к эквивалентному уравнению

$$\gamma_n B\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + u_{n+1}\right) + \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} + \gamma_n(Au_{n+1} - f) = 0, \tag{9}$$

или

$$B\left(u_{n+1}\left(1 + \frac{1}{\tau_{n+1}}\right) - \frac{u_n}{\tau_{n+1}}\right) + \frac{u_{n+1}}{\gamma_n \tau_{n+1}} + Au_{n+1} = f + \frac{u_n}{\gamma_n \tau_{n+1}}. \tag{10}$$

Введём операторы C и D:

$$Cx = B\left(\left(1+\frac{1}{\tau_{n+1}}\right)x - \frac{u_n}{\tau_{n+1}}\right), \quad Dx = \frac{x}{\gamma_n \tau_{n+1}} + Ax .$$

Оператор *D,* как и оператор *A,* обладает свойствами (3), (4) с некоторыми положительными постоянными M_1 и L_1. В силу максимальной монотонности оператора *B* *C* также является максимальным монотонным оператором (см.[1, с.60]). В новых обозначениях уравнение (10) перепишется в виде

$$Cu_{n+1} + Du_{n+1} = f_1, \tag{11}$$

где

$$f_1 = f + \frac{u_n}{\gamma_n \tau_{n+1}}.$$

Существование единственного решения u_{n+1} уравнения (11), а следовательно, и уравнений (10), (9), (8) устанавливается рассуждениями, аналогичными приведенным в [2] для доказательства однозначной разрешимости уравнения (1).

Исследуем поведение последовательности решений $\{u_{n+1}\}$ уравнения (9) при $n \to \infty$.

Пусть $\eta_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}}$ и элемент $h_{n+1} \in B(\eta_{n+1} + u_{n+1})$ такой, что (см. (9)):

$$\gamma_n h_{n+1} + \eta_{n+1} + \gamma_n (Au_{n+1} - f) = 0. \tag{12}$$

Согласно (2), существует элемент $v \in Bx$ такой, что

$$v + Ax - f = 0,$$

и следовательно

$$\gamma_n (v + Ax - f) = 0. \tag{13}$$

Вычитая (13) из (12) и умножая результат скалярно на $\eta_{n+1} + u_{n+1} - x,$ получаем равенство

$$\gamma_n (h_{n+1} - v, \eta_{n+1} + u_{n+1} - x) + (\eta_{n+1}, \eta_{n+1} + u_{n+1} - x) +$$
$$+ \gamma_n (Au_{n+1} - Ax, \eta_{n+1} + u_{n+1} - x) = 0 . \tag{14}$$

В силу монотонности оператора *B* имеем неравенство

$$(h_{n+1} - v, \eta_{n+1} + u_{n+1} - x) \geq 0,$$

то есть первое слагаемое в (14) неотрицательно. Преобразуем второе слагаемое:

$$(\eta_{n+1}, \eta_{n+1} + u_{n+1} - x) = (\eta_{n+1}, \eta_{n+1}) + (\eta_{n+1}, u_{n+1} - x) =$$
$$= \| \eta_{n+1} \|^2 + \left(\frac{u_{n+1} - x}{\tau_{n+1}}, u_{n+1} - x\right) + \left(\frac{x - u_n}{\tau_{n+1}}, u_{n+1} - x\right) =$$
$$= \frac{1}{\tau_{n+1}^2} \| u_{n+1} - u_n \|^2 + \frac{1}{\tau_{n+1}} \| u_{n+1} - x \|^2 - \frac{1}{\tau_{n+1}} (u_n - x, u_{n+1} - x) . \tag{15}$$

Воспользовавшись свойствами (3), (4) оператора A и неравенством $ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, получим оценку третьего слагаемого в (14).

$$\gamma_n (Au_{n+1} - Ax, \eta_{n+1} + u_{n+1} - x) = \gamma_n (Au_{n+1} - Ax, u_{n+1} - x) +$$

$$+\gamma_n \left(Au_{n+1} - Ax, \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}}\right) \ge \gamma_n M \| u_{n+1} - x \|^2 - \gamma_n \| Au_{n+1} - Ax \| \left\| \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} \right\| \ge$$

$$\ge \gamma_n M \| u_{n+1} - x \|^2 - \gamma_n L \| u_{n+1} - x \| \left\| \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau_{n+1}} \right\| \ge \gamma_n M \| u_{n+1} - x \|^2 -$$

$$-\gamma_n \frac{L}{2} \| u_{n+1} - x \|^2 - \gamma_n \frac{L}{2\tau_{n+1}^2} \| u_{n+1} - u_n \|^2 =$$

$$= \gamma_n \left(M - \frac{L}{2} \right) \| u_{n+1} - x \|^2 - \gamma_n \frac{L}{2\tau_{n+1}^2} \| u_{n+1} - u_n \|^2 . \tag{16}$$

Отбрасывая в (14) первое слагаемое и учитывая (15), (16), от (14) приходим к следующему неравенству

$$\frac{1}{\tau_{n+1}^2} \left(1 - \frac{\gamma_n L}{2} \right) \| u_{n+1} - u_n \|^2 + \left(\frac{1}{\tau_{n+1}} + \gamma_n \left(M - \frac{L}{2} \right) \right) \| u_{n+1} - x \|^2 - \\ - \frac{1}{\tau_{n+1}} (u_n - x, u_{n+1} - x) \le 0. \tag{17}$$

Пусть

$$\gamma_n \le \frac{2}{L}, \tag{18}$$

тогда первое слагаемое в (17) неотрицательно, и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{\tau_{n+1}} + \gamma_n \left(M - \frac{L}{2} \right) \right) \| u_{n+1} - x \|^2 \le \frac{1}{\tau_{n+1}} (u_n - x, u_{n+1} - x) \le \\ \le \frac{1}{\tau_{n+1}} \| u_n - x \| \cdot \| u_{n+1} - x \|. \tag{19}$$

При выполнении условия

$$M - \frac{L}{2} > 0 \tag{20}$$

из (19) получаем, что

$$\| u_{n+1} - x \| \le \frac{\| u_n - x \|}{1 + \tau_{n+1} \gamma_n (M - L/2)} < \| u_n - x \|. \tag{21}$$

Следовательно, верно неравенство

$$\| u_{n+1} - x \| \le \frac{\| u_1 - x \|}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \tau_{k+1}\gamma_k (M - L/2)\right)}. \tag{22}$$

Пусть

$$0 < \bar{\gamma} \le \gamma_n, \;\; 0 < \bar{\tau} \le \tau_n, \tag{23}$$

тогда из (22) вытекает оценка

$$\| u_{n+1} - x \| \le \frac{\| u_1 - x \|}{(1 + \bar{\tau}\ \bar{\gamma}(M - L/2))^n}.$$

При $n \to \infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, A: $H \to H$ – однозначный оператор, обладающий свойствами (3), (4), причём имеет место неравенство (20), B: $H \to 2^H$ – многозначный максимальный монотонный оператор, $\{\tau_n\}$, $\{\gamma_n\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел, удовлетворяющих условиям (18), (23). Тогда последовательность $\{u_n\}$ однозначно определяется из (8) и при любом $u_1 \in H$ сходится по норме пространства H к единственному решению уравнения (1).

Список литературы:

[1] Рязанцева И.П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Н. Новгород. Изд-во НГТУ, 2008.
[2] Рязанцева И.П. Непрерывные методы первого порядка для монотонных включений в гильбертовом пространстве // Журнал выч. матем. и матем. физики. 2013. Т.53. N8. С. 1241–1248.
[3] Антипин А.С. Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования // Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1989. С. 5–43.
[4] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
[5] Рязанцева И.П. Непрерывный метод регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств // Материалы восьмой Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и их приложения», посвящ. 80-летию со дня рождения А.Д. Ляшко. Казань, 2010. С. 373–379.

О.Н. Кащеева
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ 2×2 AKNS СИСТЕМ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Найдены характеристики законов сохранения 2×2 AKNS систем второго и третьего порядка.

Пусть

$$\Delta_\nu = 0, \quad (\nu = \overline{1, k}) \tag{1}$$