$$\| u_{n+1} - x \| \le \frac{\| u_1 - x \|}{\prod_{k=1}^{n} (1 + \tau_{k+1} \gamma_k (M - L/2))}. \tag{22}$$

Пусть

$$0 < \bar{\gamma} \le \gamma_n, \;\; 0 < \bar{\tau} \le \tau_n, \tag{23}$$

тогда из (22) вытекает оценка

$$\| u_{n+1} - x \| \le \frac{\| u_1 - x \|}{(1 + \bar{\tau}\; \bar{\gamma}(M - L/2))^n}.$$

При $n \to \infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, A: $H \to H$ – однозначный оператор, обладающий свойствами (3), (4), причём имеет место неравенство (20), B: $H \to 2^H$ – многозначный максимальный монотонный оператор, $\{\tau_n\}$, $\{\gamma_n\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел, удовлетворяющих условиям (18), (23). Тогда последовательность $\{u_n\}$ однозначно определяется из (8) и при любом $u_1 \in H$ сходится по норме пространства H к единственному решению уравнения (1).

Список литературы:

[1] Рязанцева И.П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Н. Новгород. Изд-во НГТУ, 2008.

[2] Рязанцева И.П. Непрерывные методы первого порядка для монотонных включений в гильбертовом пространстве // Журнал выч. матем. и матем. физики. 2013. Т.53. N8. С. 1241–1248.

[3] Антипин А.С. Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования // Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1989. С. 5–43.

[4] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

[5] Рязанцева И.П. Непрерывный метод регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств // Материалы восьмой Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и их приложения», посвящ. 80-летию со дня рождения А.Д. Ляшко. Казань, 2010. С. 373–379.

О.Н. Кащеева
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ 2×2 AKNS СИСТЕМ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Найдены характеристики законов сохранения 2×2 AKNS систем второго и третьего порядка.

Пусть

$$\Delta_\nu = 0, \quad (\nu = \overline{1, k}) \tag{1}$$

– система k дифференциальных уравнений в частных производных порядка n с двумя независимыми переменными x и t. Говорят, что система (1) допускает представление Лакса (представление нулевой кривизны), если ее можно записать как условие интегрируемости

$$U_t - V_x + [U,V] = 0 \tag{2}$$

некоторой линейной системы ψ

$$\begin{cases} \Psi_x = U\Psi, \\ \Psi_t = V\Psi \end{cases}$$

т.е. $U_t - V_x + [U,V] = S^{\nu}\Delta_{\nu}$.

Для 2×2 систем AKNS [1]

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & p \\ q & -\lambda \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$A = \sum_{j=0}^{n} a_j(x,t)\lambda^{n-j}, \qquad B = \sum_{j=0}^{n} b_j(x,t)\lambda^{n-j}, \qquad C = \sum_{j=0}^{n} c_j(x,t)\lambda^{n-j},$$

p, q, a_j, b_j, c_j – вещественные или комплексные функции от x и t,
λ – вещественный или комплексный параметр, который называется спектральным параметром.

Подставляя матрицы (3) в условие интегрируемости (2), которое должно выполняться при любом значении λ, получим систему эволюционных уравнений

$$\begin{cases} p_t = b_{n,x} + 2pa_n \\ q_t = c_{n,x} - 2pa_n \end{cases}, \tag{4}$$

и формулы для определения функций a_j, b_j, c_j:

$$b_0 = c_0 = 0,$$

$$a_{j,x} = pc_j - qb_j, \qquad (j = \overline{0,n})$$

$$b_{j+1} = \frac{1}{2}b_{j,x} + pa_j, \qquad (j = \overline{0,n-1})$$

$$c_{j+1} = -\frac{1}{2}c_{j,x} + qa_j, \qquad (j = \overline{0,n-1}).$$

Для j = 0,1,2,3 (см., например [2])

$$a_0 = \alpha_0(t),\ b_0 = c_0 = 0,$$

$$a_1 = \alpha_1(t),\ b_1 = \alpha_0(t)p,\ c_1 = \alpha_0(t)q,$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}\alpha_0(t)pq + \alpha_2(t),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\alpha_0(t)p_x + \alpha_1(t)p,\ c_2 = -\frac{1}{2}\alpha_0(t)q_x + \alpha_1(t)q,$$

$$a_3 = \frac{1}{4}\alpha_0(t)(pq_x - qp_x) - \frac{1}{2}\alpha_1(t)pq + \alpha_3(t),$$

$$b_3 = \frac{1}{4}\alpha_0(t)(p_{xx} - 2p^2q) + \frac{1}{2}\alpha_1(t)p_x + \alpha_2(t)p,$$

$$c_3 = -\frac{1}{4}\alpha_0(t)(q_{xx} - 2pq^2) - \frac{1}{2}\alpha_1(t)q_x + \alpha_2(t)q,$$

где $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ – произвольные функции от t.

В работе [3] предложен способ построения законов сохранения для систем кирального типа с использованием представления Лакса. Покажем, что для 2×2 систем AKNS второго и третьего порядка с помощью представления Лакса можно найти характеристики законов сохранения.

Теорема 1. Пусть $\Delta_\nu = 0$, $(\nu = \overline{1,2})$ – 2×2 AKNS система второго или третьего порядка, коэффициенты которой не зависят явно от t, т.е. $\alpha_j = const\ (j = \overline{0,3})$.

Обозначим $S = S^\nu \Delta_\nu = U_t - V_x + [U, V]$, $\quad \tilde{V} = V_\lambda$ и $Q = \mathrm{tr} S\tilde{V}$.

Тогда $Q = \mathbf{Div} P$, где P – некоторый закон сохранения системы $\Delta_\nu = 0$. Другими словами, набор $(\mathrm{tr}S^1\tilde{V}, \mathrm{tr}S^2\tilde{V})$ является характеристикой закона сохранения данной системы.

Доказательство. Действительно, для 2×2 систем AKNS

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_1 \\ \Delta_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_\lambda = \begin{pmatrix} A_\lambda & B_\lambda \\ C_\lambda & -A_\lambda \end{pmatrix}$$

и $Q = \mathrm{tr} S\tilde{V} = C_\lambda \Delta_1 + B_\lambda \Delta_2$.

При n = 2 получим

$$Q = \alpha_0 q \Delta_1 + \alpha_0 p \Delta_2.$$

Нетрудно проверить, что если $\alpha_j = const\ (j = \overline{0,2})$, то оператор Эйлера $\mathbf{E}(q\Delta_1 + p\Delta_2) \equiv 0$. Отсюда следует, что

$$q\Delta_1 + p\Delta_2 = \mathbf{Div} P,$$

т.е. (q, p) – характеристика некоторого закона сохранения P системы AKNS второго порядка.

Аналогично, при $n = 3$ находим

$$Q = \lambda(\alpha_0 q \Delta_1 + \alpha_0 p \Delta_2) + \left(-\frac{1}{2}\alpha_0 q_x + \alpha_1 q\right)\Delta_1 + \left(\frac{1}{2}\alpha_0 p_x + \alpha_1 p\right)\Delta_2.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\mathbf{E}(q\Delta_1 + p\Delta_2) \equiv 0$ и $\mathbf{E}(q_x\Delta_1 - p_x\Delta_2) \equiv 0$, т.е. наборы (q, p) и $(q_x, -p_x)$ являются характеристиками некоторых законов сохранения 2×2 AKNS системы третьего порядка. Теорема доказана.

Список литературы:

[1] Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Segur. H. Nonlinear evolution equations of physical significance.// Phys. Rev. Lett., –1973. – V.31 – P. 125–127.
[2] Gu C., Hu H., Zhou Z. Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and their Application. 2005. Published by Springer. The Netherlands. 310 p.
[3] Баландин А.В. Законы сохранения интегрируемых систем кирального типа.// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2013. – No 6 (1). – С. 153–156.