

[2] Яковлев Ф.Г., Никитаев И.В. Справочный материал по подбору оборудования для объемного гидропривода. – Н. Новгород, Изд-во ВГАВТ, с. 34, 2013 г.

И.С. Тарасов, М.Т. Маркова, А.А. Чудаков
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО ПЛОСКИМ ТРАЕКТОРИЯМ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

1. Введение

Исследования закономерностей упругопластического деформирования конструкционных материалов имеют принципиальное значение для развития фундаментальных основ теории пластичности. Несмотря на общее значительное количество работ по исследованию упругопластических процессов при сложном нагружении, большинство экспериментов выполнено по многозвенным ломанным и плоским криволинейным траекториям напряжений и деформаций постоянной кривизны [1–6]. Экспериментов для сложных траекторий, включая плоские и пространственные траектории деформирования переменной кривизны и кручения, выполнено в настоящее время значительно меньше [5–7]. В то же время для проверки физической достоверности определяющих соотношений теории пластичности необходимо проведение расчётов и сопоставление полученных численных результатов с имеющимися в литературе экспериментальными данными на широком классе сложных траекторий произвольной кривизны и кручения. Результаты таких исследований могут быть также использованы при определении (конкретизации) материальных параметров, скалярных функций и функционалов, входящих в определяющие соотношения термопластичности.

Ниже представлена математическая модель термопластичности, описывающая основные эффекты сложного пластического деформирования металлов при произвольных непропорциональных путях термосилового нагружения и проведена оценка применимости определяющих соотношений путём сопоставления численных результатов с имеющимися в литературе экспериментальными данными [9].

2. Определяющие соотношения термопластичности

Определяющие соотношения термопластичности базируются на следующих основных положениях:

– тензоры деформаций e_{ij} и скоростей деформаций \dot{e}_{ij} включают упругие деформации e_{ij}^e, \dot{e}_{ij}^e (не зависящие от истории нагружения и определяющиеся конечным состоянием процесса) и пластические – e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p (зависящие от истории процесса нагружения);

– начальная поверхность текучести для различных температур описывается поверхностью в форме Мизеса; эволюция изменения поверхности текучести описывается изменением ее радиуса C_p и перемещением ее центра ρ_{ij} ;

– справедлив принцип градиентальности вектора скорости пластических деформаций к поверхности текучести в точке нагружения;

– изменение объема тела упруго;

– рассматриваются начально-изотропные среды; учитывается только анизотропия, вызванная процессами пластического деформирования.

В упругой области связь между шаровыми и девиаторными составляющими тензоров напряжений и деформаций устанавливается с помощью закона Гука:

$$\begin{aligned}\sigma &= 3K[e - \alpha(T - T_0)], \quad \sigma_{ij} = 2Ge'_{ij}, \\ \Delta\sigma &= 3K[\Delta e - \Delta(\alpha T)] + \frac{\Delta K}{K}\sigma, \quad \Delta\sigma'_{ij} = 2G\Delta e'_{ij} + \frac{\Delta G}{G}\sigma'_{ij}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь σ , $\Delta\sigma$, e , Δe – шаровые, а σ'_{ij} , $\Delta\sigma'_{ij}$, e'_{ij} , $\Delta e'_{ij}$ – девиаторные составляющие тензоров напряжений σ_{ij} , деформаций e_{ij} и их приращений $\Delta\sigma_{ij}$, Δe_{ij} соответственно; T – температура; T_0 – начальная температура; $K(T)$ – модуль объемного сжатия; $G(T)$ – модуль сдвига; $\alpha(T)$ – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Эффекты монотонного и циклического деформирования в пространстве напряжений учитываются с помощью поверхности текучести, уравнение которой имеет вид:

$$F_s = S_{ij}S_{ij} - C_p^2 = 0, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}. \quad (2)$$

Для описания сложных циклических режимов деформирования в пространстве напряжений вводится поверхность циклической «памяти». Уравнение поверхности «памяти», позволяющее при расчетах отделить монотонные процессы деформирования от циклических, имеет вид:

$$F_p = \rho_{ij}\rho_{ij} - \rho_{\max}^2 = 0, \quad (3)$$

где ρ_{\max} – максимальный за историю нагружения модуль переменной ρ_{ij} .

Принимается эволюционное уравнение для радиуса поверхности текучести вида [8]:

$$\dot{C}_p = [q_\chi H(F_p) + a(Q_s - C_p)\Gamma(F_p)]\dot{\chi} + q_3\dot{T}, \quad (4)$$

$$C_p = C_p^0 + \int_0^t \dot{C}_p dt, \quad \dot{\chi} = \left(\frac{2}{3}\dot{e}'_{ij}\dot{e}'_{ij}\right)^{1/2}, \quad \chi_m = \int_0^t \dot{\chi} H(F_p) dt, \quad \chi = \int_0^t \dot{\chi} dt, \quad (5)$$

$$q_\chi = \frac{q_2 A \psi_1 + (1 - A)q_1}{A \psi_1 + (1 - A)}, \quad Q_s = \frac{Q_2 A \psi_2 + (1 - A)Q_1}{A \psi_2 + (1 - A)}, \quad 0 \leq \psi_i \leq 1 \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta, \quad \cos \theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{e}'_{ij}}{(\dot{e}'_{ij}\dot{e}'_{ij})^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij}S_{ij})^{1/2}}, \quad (7)$$

$$H(F_p) = \left\{ \begin{array}{l} 1, F_p = 0 \wedge \rho_{ij}\dot{\rho}_{ij} > 0 \\ 0, F_p < 0 \vee \rho_{ij}\dot{\rho}_{ij} \leq 0 \end{array} \right\}, \quad \Gamma(F_p) = 1 - H(F_p) \quad (8)$$

Здесь q_1 , q_2 , q_3 – модули изотропного упрочнения, соответствующие монотонным лучевым путям нагружения (q_1), излому траектории деформирования на 90° (q_2), температурному изменению радиуса поверхности текучести (q_3); a – постоянная, определяющая скорость процесса стабилизации формы петли гистерезиса циклического деформирования материала;

Q_s – стационарное значение радиуса поверхности текучести при данных ρ_{\max} и T ;

χ и χ_m – длины траекторий пластического деформирования материала при циклическом и монотонном нагружениях;

C_p^0 – начальное значение радиуса поверхности текучести.

Первый член уравнения (4) описывает изотропное упрочнение в результате монотонного пластического деформирования ($H(F_p)=1$ и $\Gamma(F_p)=0$), второй член – циклическое упрочнение материала ($H(F_p)=0$ и $\Gamma(F_p)=1$), а третий – изменение радиуса поверхности текучести при изменении температуры. В целом уравнение (4) описывает локальную анизотропию пластического упрочнения в зависимости от параметра A , характеризующего отклонение вектора догрузки от нормали к поверхности текучести в точке нагружения. Операторы $H(F_p)$ и $\Gamma(F_p)$ позволяют автоматически провести разделение процессов монотонного и циклического деформирования.

Уравнение для смещения поверхности текучести основано на гипотезе А.А. Ильюшина, заключающейся в том, что упрочнение зависит от истории деформирования лишь на некоторой ближайшей части траектории (запаздывание векторных свойств). Внутренняя переменная ρ_{ij} , учитывающая анизотропию упрочнения пластического деформирования, удовлетворяет эволюционному уравнению [8]:

$$\dot{\rho}_{ij} = g_1 \dot{e}_{ij}^p - g_2 \rho_{ij} \dot{\chi} - g_3 \rho_{ij} \langle \dot{T} \rangle, \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, \quad (9)$$

где $g_1 > 0$, $g_2 > 0$ и $g_3 > 0$ – модули анизотропного упрочнения. Первый и второй члены этого уравнения отвечают за анизотропную часть деформационного упрочнения, а третий – за изменение ρ_{ij} в результате воздействия температуры T .

Уравнение (9) описывает известный пространственный эффект Баушингера и анизотропию векторных свойств при изменении направления деформирования (изломе траектории деформирования). Введение второго члена в это соотношение моделирует исчезающую память внутренней переменной ρ_{ij} (скорость изменения ρ_{ij} является разностью между двумя составляющими $g_1 \dot{e}_{ij}^p$ и $g_2 \rho_{ij} \dot{\chi}$).

Для характеристики поведения поверхности «памяти» необходимо сформулировать эволюционное уравнение для ρ_{\max} :

$$\dot{\rho}_{\max} = \frac{(\rho_{ij} \dot{\rho}_{ij}) H(F_p)}{(\rho_{mn} \rho_{mn})^{1/2}} - g_2 \rho_{\max} \dot{\chi} - g_3 \rho_{\max} \langle \dot{T} \rangle. \quad (10)$$

Здесь и далее для любой величины \dot{B} , заключенной в угловые скобки $\langle \dot{B} \rangle$, выполняются условия $\langle \dot{B} \rangle = \begin{cases} \dot{B} & \text{при } \dot{B} > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{B} \leq 0 \end{cases}$.

Компоненты тензора скоростей пластических деформаций подчиняются закону градиентальности вектора скорости пластических деформаций к поверхности текучести в точке нагружения:

$$\dot{e}_{ij}^p = \lambda S_{ij}, \quad (11)$$

где λ – коэффициент пропорциональности, определяемый из условия прохождения

новой поверхности текучести через конец вектора девиатора напряжений в конце этапа нагружения.

Материальные параметры, входящие в выражения (4)–(10), находятся из различных экспериментов:

- q_1, q_3, g_1, g_2 и g_3 – из опытов на одноосное растяжение-сжатие цилиндрических трубчатых образцов по специальным циклическим программам испытаний [8];
- Q_1 – из испытаний на блочное циклическое симметричное нагружение с заданной амплитудой деформаций в каждом блоке до стабилизации петли гистерезиса на каждом уровне амплитуд деформаций;
- параметр a – из условия наилучшей аппроксимации экспериментальных закономерностей стремления C_p к установившемуся состоянию;
- q_2 – из эксперимента на сложное нагружение: растяжение до некоторого значения e_{11}^{p*} и последующее кручение с построением траектории напряжений в пространстве $\sigma_{11} - \sigma_{12}$.
- Q_2 – из эксперимента на двухблочное циклическое деформирование с одинаковой заданной интенсивностью амплитуды деформаций до стабилизации петли гистерезиса в каждом блоке: первый блок – это симметричное циклическое растяжение-сжатие, второй – последующее циклическое симметричное нагружение образца кручением.

3. Сравнение численных результатов с экспериментальными данными

В [9] изложены результаты экспериментальных исследований процессов деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов) по различным траекториям, включая плоские и пространственные, многосвязные и криволинейные траектории произвольной кривизны и кручения. Экспериментальные результаты получены лабораторией механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета на автоматизированном расчётно-экспериментальном комплексе СМ-ЭВМ под общим руководством профессора В. Г. Зубчанинова.

Эксперименты выполнены при нормальной температуре $T = 20$ °С на тонкостенных цилиндрических образцах с длиной рабочей части $l = 90$ мм, толщиной стенки $h = 1$ мм и радиусом срединной поверхности $R = 15$ мм. Материал образцов сталь 45. Образцы нагружались по заданной программе испытаний осевой силой P , внутренним давлением q и крутящим моментом M . Компоненты тензоров напряжений и деформаций в рабочей части образца вычислялись по формулам:

$$\sigma_{11} = P / 2\pi R h, \quad \sigma_{22} = q R / h, \quad \sigma_{12} = M / 2\pi R^2 h,$$

$$e_{11} = \Delta l / l, \quad e_{22} = \Delta R / R, \quad e_{12} = \varphi R / 2l,$$

где φ – угол закручивания (остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций равнялись нулю).

При численном моделировании данных экспериментальных процессов с использованием развитой модели термопластичности заданными являлись экспериментальные траектории деформаций (закономерности изменения компонент тензора дефор-

маций $e_{ij}(t)$, а траектории напряжений получались в результате интегрирования определяющих соотношений (1–11) по заданной истории изменения e_{ij} .

Компоненты векторов S_k , \mathcal{E}_k напряжений $\bar{\sigma}$, деформаций $\bar{\varepsilon}$ и их модули σ , ε вычислялись по формулам:

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{11} - \sigma_0) = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\sigma_{11} - \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right], S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), S_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}$$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}(e_{11} - e_0), \mathcal{E}_2 = \sqrt{2}\left(e_{22} + \frac{1}{2}e_{11} - \frac{3}{2}e_0\right), \mathcal{E}_3 = \sqrt{2}e_{12}$$

$$\sigma = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \varepsilon = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2},$$

где $e_0 = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33})$, $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$.

При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости: $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$ и считалось, что $\sigma_{33} = 0$.

Образец из стали 45 предварительно закручивался до значения $\mathcal{E}_3 = 0,0062$, а затем на плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ реализовывалась криволинейная траектория постоянной кривизны $\chi_1 = 161,3$, $R = 0,0062$ (рис. 1).

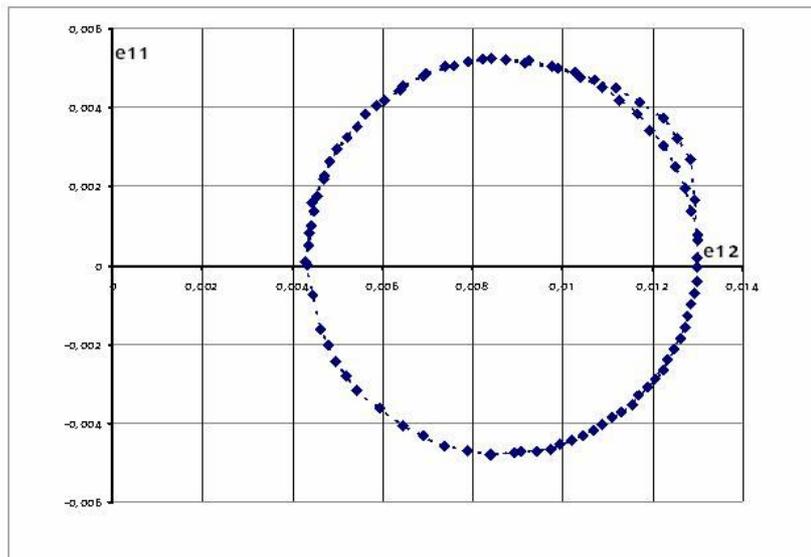


Рис. 1

На рис. 2–3 «локальные» диаграммы $\sigma_{11} - e_{11}$, $\sigma_{12} - e_{12}$ соответственно, (пунктирной кривой отмечены опытные данные [9]). Видно качественное и количественное совпадение опытных и расчётных данных.

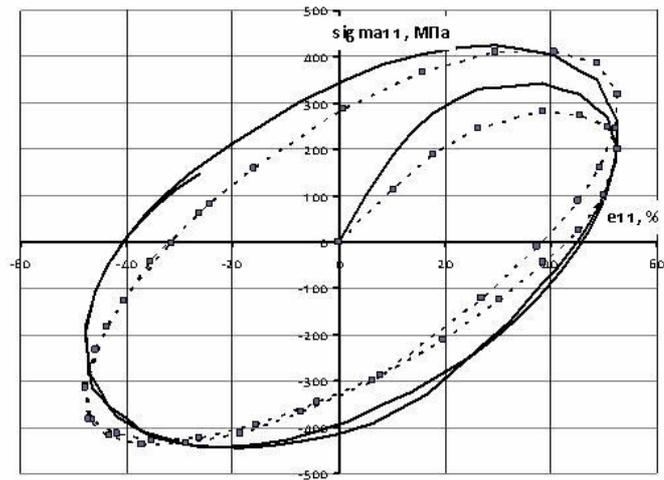


Рис. 2

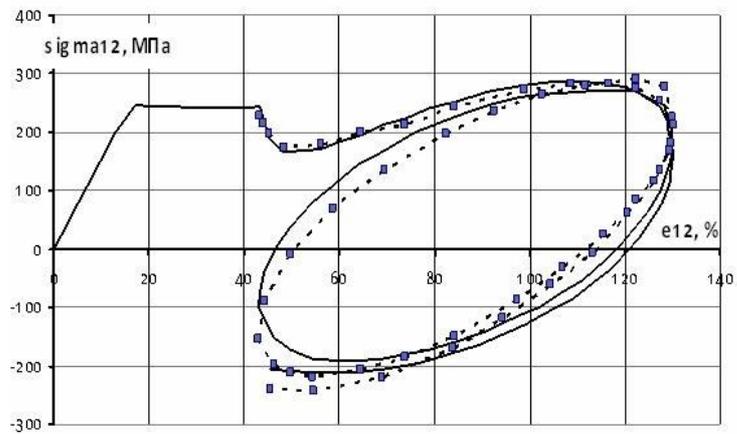


Рис. 3

На рис. 4 представлен образ процесса нагружения в пространстве напряжений $\sigma_{11} - \sigma_{12}$.

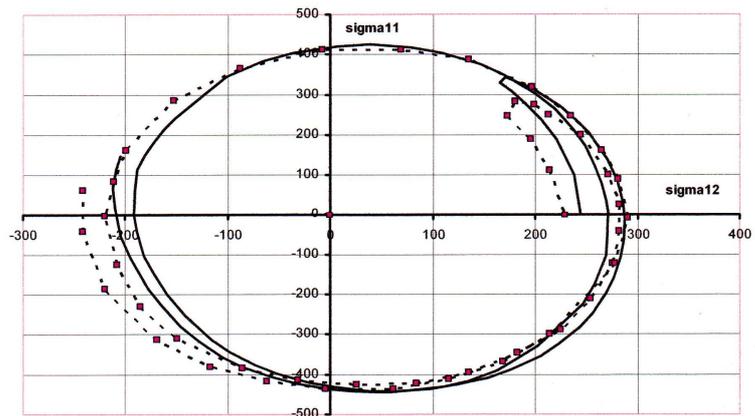


Рис. 4

На рис. 5 представлена «глобальная» диаграмма деформирования $\sigma - \varepsilon$.

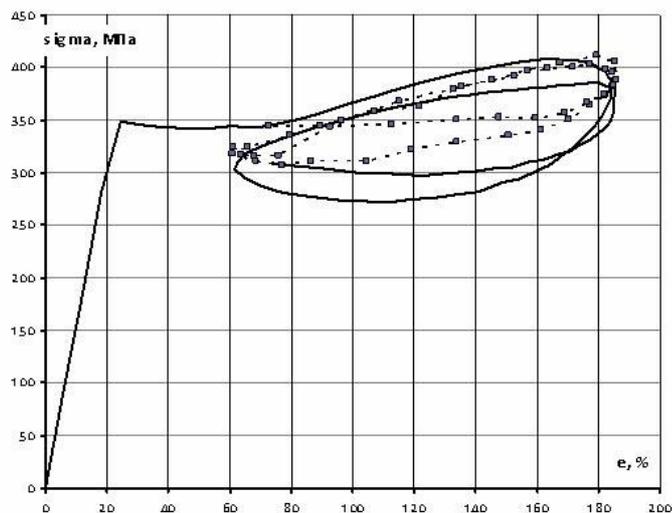


Рис. 5

В целом, анализируя полученные численные результаты в сравнении с экспериментальными данными, можно отметить качественное и количественное совпадение модельных представлений с опытными данными [9]. Некоторое отличие расчётных значений от экспериментальных данных может быть объяснено, например, неточностями при задании физико-механических характеристик материала, и тем фактом, что при обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости материала.

4. Заключение

Представлен вариант математической модели для расчёта параметров процессов неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов) по заданной истории нагружения. При нестационарном нагружении данная модель позволяет учитывать упрочнение материала при пропорциональном и непропорциональном деформировании. Проведена оценка адекватности определяющих соотношений термопластичности путём сопоставления результатов численных экспериментов с экспериментальными данными для сложных траекторий непропорционального деформирования, которая подтвердила правильность моделирования процессов неизотермического упругопластического деформирования.

Список литературы:

- [1] Дегтярёв В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1967. 131 с.
- [2] Жуков А.М. Некоторые особенности поведения металлов при упругопластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 30–57.
- [3] Экспериментальное исследование процессов деформирования стали по двухзвенным траекториям / А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук, Н.М. Кульчицкий, А.Ф. Хакимов // Проблемы прочности. 1988 №3 С. 7–10.
- [4] Ohashi Y., Tanaka E. Plastic behavior of mild steel along orthogonal trilinear strain trajectory in free-dimensional vector space of strain deviator // Transactions of the ASME. Oct. 1981. V. 103. №4. P. 287–292.
- [5] Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. Экспериментальная пластичность. Книга 1. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТГТУ, 2003. - 172 с.

- [6] Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л. Гаранников В.В. Экспериментальная пластичность. Книга 2. Процессы сложного нагружения. Тверь: ТГТУ, 2004. - 184 с.
 [7] Завахайко А.А., Можаровский Н.С. О характеристиках прочности и пластичности при сложных путях нагружения // Проблемы прочности. 1992. №1. С. 90–93
 [8] Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
 [9] Зубчанинов В.Г. Устойчивость и пластичность. Книга 2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.

Т.И. Тарнопольская, О.В. Сидорова
 ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЁСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Для решения задач об устойчивости транспортных средств одним из способов является составление уравнений возмущенного движения. В некритических по Ляпунову случаях можно ограничиться анализом линейного приближения. Невозмущенным движением будем считать случай, когда единственной, не равной нулю обобщенной координате, соответствует некриволинейное движение в плоскости.

Чтобы описать движение транспортного средства, следует воспользоваться уравнениями Лагранжа II рода. Динамические уравнения в пространстве трех обобщенных координат (x, y, ϑ) в этом случае принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = Q_{\vartheta} \end{cases} \quad (1)$$

здесь $T = \frac{1}{2} (m v_c^2 + I \dot{\vartheta}^2)$ – кинетическая энергия системы, совершающей плоскопараллельное движение, а Q_x, Q_y, Q_{ϑ} – обобщенные силы по соответствующим обобщенным координатам. Где x – перемещение вдоль продольной оси, связанной с центром масс, y – перемещение вдоль поперечной оси, ϑ – курсовой угол, а их производные – соответствующие обобщенные скорости.

Для транспортного средства, представленного на рис. 1 с управляемыми передними колесами (углом θ) при учете перераспределения нагрузок по правому и левому борту обобщенные силы могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_x &= -(X_1 \cos\theta + Y_1 \sin\theta + X'_1 \cos\theta' + Y'_1 \sin\theta') - \sum_{i=1}^2 (X_{2i} + X'_{2i}); \\ Q_y &= (Y_1 \cos\theta - X_1 \sin\theta + Y'_1 \cos\theta' - X'_1 \sin\theta') + \sum_{i=1}^2 (Y_{2i} + Y'_{2i}); \\ Q_{\vartheta} &= H(X_1 \cos\theta + Y_1 \sin\theta - X'_1 \cos\theta' - Y'_1 \sin\theta') + \varepsilon(X_1 - X'_1) - a(Y_1 \cos\theta - \\ &\quad - X_1 \sin\theta + Y'_1 \cos\theta' - X'_1 \sin\theta') + \sum_{i=1}^2 [(X_{2i} + X'_{2i})H_2 - (Y_{2i} + Y'_{2i})b_{2i}]. \end{aligned} \quad (2)$$