Л.В. Лебедева, Ж.В. Клюшникова, Н.А. Прохоров
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ДВЕ ЗАДАЧИ ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассматриваются две задачи из математической теории принятия оптимальных решений: транспортная задачи линейного программирования и конечная парная игра с нулевой суммой.

I. *Закрытая транспортная задача.* Как известно [1], транспортная задача линейного программирования состоит в том, чтобы имея данные о количестве $a_1, \cdots, a_m$ однородного груза у каждого из m поставщиков $A_1, \cdots, A_m$, об объемах $b_1, \cdots, b_n$, заказанных каждым из n потребителей $B_1, \cdots, B_n$ грузов, и о стоимости $C = \|c_{ij}\|$ перевозок единицы груза по каждому из направлений, составить такой план $X = \|x_{ij}\|$ перевозок, при котором суммарные издержки $Z(X) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ по транспортировке были бы минимальными.

Решение сформулированной задачи как задачи линейного программирования начинается с построения первоначального опорного плана или методом северо-западного угла, или методом минимальной стоимости, … Метод северо-западного угла использует только информацию об объемах грузов, имеющихся у поставщиков и требуемых заказчиками. Метод минимальной стоимости учитывает и информацию о транспортных издержках. Всегда ли метод минимальной стоимости позволяет построить первоначальный план, стоимость $Z_{мс}$ перевозок согласно которому будет меньше, чем стоимость $Z_{сз}$ перевозок согласно плану, построенному методом северо-западного угла?

Рассмотрение этого вопроса было проведено для простейшей закрытой транспортной задачи: $n = 2, m = 2, a_1 + a_2 = b_1 + b_2$.

Установлено, что при любом соотношении объемов перевозимого груза – параметров a_1, a_2, b_1, b_2 – существуют такие соотношения стоимостных параметров c_{ij}, при которых метод северо-западного угла дает более эффективный первоначальный план.

Так, если $a_1 < b_1$, то стоимость перевозок

$$Z_{сз} = a_1 c_{11} + (b_1 - a_1) c_{21} + +(a_1 + a_2 - b_1) c_{22}.$$

Если при этом $c_{11} = \min\|c_{ij}\|$, то $Z_{сз} .= Z_{мс}$. Если $c_{12} = \min\|c_{ij}\|$, то при $c_{12} > c_{11} - c_{21} + c_{22}$ получим $Z_{сз} < Z_{мс}$. В противном случае $Z_{сз} > Z_{мс}$. Например, если $a_1 = 40, a_2 = 60, b_1 = 50, b_2 = 50,$ $c_{11} = 10, c_{12} = 8, c_{21} = 19, c_{22} = 10$, то $Z_{сз} = 1190$, $Z_{мс} = 1870$.

Кроме того, получены статистические данные для задачи с тремя заказчиками и двумя поставщиками: в 11 вариантах из 25 рассмотренных метод северо-западного угла оказался эффективнее: $Z_{сз} < Z_{мс}$.

II. Конечная парная игра с нулевой суммой [1]. Пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

является платежной матрицей игры. Введем обозначения: $\alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le n} \{a_{ij}\}$ – минимальный элемент i-й строки, $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} \{a_{ij}\}$ – максимальный элемент j-го столбца. Число $\alpha = \max\limits_{1 \le i \le m} \{\alpha_i\}$ называется нижней ценой игры, число $\beta = \min\limits_{1 \le j \le n} \{\beta_j\}$ – верхней ценой игры.

Если $\alpha = \beta$, то игра называется игрой с седловой точкой, элемент $a_{pq} = \alpha = \beta$ называется седловой точкой, а его значение $a_{pq} = \upsilon$ называется ценой игры.

Теорема 1

Если элемент a_{pq}, стоящий на пересечении p-й строки и q-го столбца, является минимальным в p-й строке и максимальным в q-м столбце, то элемент a_{pq} есть седловая точка.

Доказательство.

Так как $a_{pq} = \min\limits_{1 \le j \le n} \{a_{pj}\}$, то 1) $\alpha_p = \min\limits_{1 \le j \le n} \{a_{pj}\} = a_{pq}$;

2) $\forall j \ne q \quad a_{pj} = a_{pq} + \varepsilon_j^2$, где $\varepsilon_j^2 \ge 0$; 3) $\forall j \ne q \quad \beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} \{a_{ij}\} \ge a_{pj} \ge a_{pq}$.

Так как $a_{pq} = \max\limits_{1 \le i \le m} \{a_{iq}\}$, то 1) $\beta_q = \max\limits_{1 \le i \le m} \{a_{iq}\} = a_{pq}$;

2) $\forall i \ne p \quad a_{iq} = a_{pq} - \delta_i^2$, где $\delta_i^2 \ge 0$; 3) $\forall i \ne p \quad \alpha_i = \min\limits_{1 \le j \le n} \{a_{ij}\} \le a_{iq} \le a_{pq}$.

Имеем

1) $\alpha_p = a_{pq}$; 2) $\alpha_i \le a_{pq}$, если $i \ne p$; 3) $\beta_q = a_{pq}$; 4) $\beta_j \ge a_{pq}$, если $j \ne q$.

Следовательно, $\alpha = \max\limits_{1 \le i \le m} \{\alpha_i\} = a_{pq}$ – нижняя цена игры; $\beta = \min\limits_{1 \le j \le n} \{\beta_j\} = a_{pq}$ – верхняя цена игры. Итак, $\alpha = \beta = a_{pq}$. Платежная матрица имеет седловую точку – элемент a_{pq}. Цена игры $\upsilon = a_{pq}$.

Следствие. Чтобы составить платежную матрицу игры с седловой точкой *a,* надо

1) выбрать строку и столбец, на пересечении которых должен стоять элемент *a*;

2) в качестве остальных элементов выбранной строки взять любые числа, не меньшие *a*, в качестве остальных элементов выбранного столбца – не большие *a*;

3) остальными элементами матрицы могут быть любые числа.

Теорема 2

Предположим, что в платежной матрице есть седловая точка – элемент a_{pq}, такой что $\alpha = \beta = a_{pq} = \upsilon$. Кроме того, есть элемент a_{lk} – минимальный в своей строке и максимальный в своем столбце, т.е. $a_{lk} = \min\limits_{j} a_{lj} = \max\limits_{i} a_{ik}$. Тогда элемент a_{lk} тоже является седловой точкой и имеет место равенство $a_{lk} = a_{pq} = \upsilon$.

Доказательство. Так как $a_{lk} = \min_j a_{lj}$, то $a_{lq} = a_{lk} + \varepsilon^2$. Так как $a_{lk} = \min_i a_{ik}$, то $a_{pk} = a_{lk} - \delta^2$. ($\varepsilon_j^2 \geq 0$ и $\delta_i^2 \geq 0$). Из определения седловой точки следует выполнение системы неравенств: $\begin{cases} a_{pq} \geq a_{lq} \\ a_{pq} \leq a_{pk} \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} a_{pq} \geq a_{lk} + \varepsilon^2 \\ a_{pq} \leq a_{lk} - \delta^2 \end{cases}$. Имеем $a_{lk} + \varepsilon^2 \leq a_{pq} \leq a_{lk} - \delta^2$. Отсюда $\varepsilon^2 + \delta^2 = 0$, т.е. $\varepsilon = \delta = 0$. Итак, $a_{lk} = a_{pq} = \upsilon$.

Следствие. При выполнении условий теоремы матрица игры имеет как минимум четыре седловые точки: a_{lk}, a_{lq}, a_{pk}, a_{pq}.

Список литературы:

[1] Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике: математические методы и модели / Под ред. М.С.Красса. – М.: Издательство Юрайт, 2013. – 541 с.

Л.В. Лебедева
ФБОУ ВПО «ВГАВТ»

ВЛИЯНИЕ СИЛЬНОЙ ИНЕРЦИОННОСТИ ФИЛЬТРА НА ДИНАМИКУ ИСФС (ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ)

Динамические свойства типовой ИСФС (импульсной системы фазовой синхронизации) могут быть установлены с помощью теории отображений. Предположим, что ИСФС состоит из эталонного генератора, ИФД (импульсно-фазового детектора), ФНЧ (фильтра нижних частот), управляющего элемента и подстраиваемого генератора [1]. Будем считать, что ИФД есть соединение обычного фазового детектора с синусоидальной характеристикой и импульсного элемента типа «выборка-запоминание», а в качестве ФНЧ используется ИФ (интегрирующий фильтр), обладающий сильной инерционностью.

Математическая модель такой системы может быть [2] записана в виде, так называемого, стандартного отображения тора или отображения Чирикова [3]. Изученные свойства [3–11] этого отображения говорят о том, что нет параметров, при которых в фазовом пространстве существовало бы устойчивое колебательное периодическое движение. Более того, справедлива теорема, говорящая о наличии при любых значениях параметра отображения счетного множества эллиптических и гиперболических вращательных циклов [5,7]. Для ИСФС это обозначает отсутствие области захвата в классическом определении этого понятия.

Однако есть такой интервал значений параметра, при которых фазовое пространство разделяется на не перемешивающиеся слои [3,10, 11,4,5]. Внутри этих слоев движение имеет ограниченный диапазон изменений фазовой и частотной переменной. При отсутствии помех ИСФС с ИФ может работать в режиме подстройки под эталонный сигнал или под любую комбинационную частоту. Частота, под которую происходит подстройка, зависит, прежде всего, от начального значения частотной расстройки. Существует некий интервал значений параметра, при которых области притяжения требуемого резонанса реальны. Это объясняет целесообразность использования ИСФС с ИФ в качестве умножителя или делителя частоты.