***Е.Н. Мясников***
*ФГБОУ ВО «ВГУВТ»*

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ РАДИУС ЭЛЕКТРОНА

Методом размерностей на основе приближения двухжидкостной МГД получено выражение для электромагнитного радиуса электрона. Его значение совпадает с комптоновской длиной волны и в $\alpha^{-1} \approx 137$ раз превышает классический радиус электрона.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика (МГД), вращательно неинвариантная турбулентность, классический радиус электрона, постоянная тонкой структуры.

Плазма является проводящей средой, состоящей из положительно и отрицательно заряженных частиц, которая своими свойствами во многом способна моделировать физические процессы, происходящие в макро и микромире. Приведем дисперсионное уравнение электромагнитной волны в однородной изотропной плазме

$$\omega^2 = \omega_L^2 + k^2 c^2 . \qquad (1)$$

Здесь $\omega$ и $k$ − частота и волновое число,

$\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 / m_e}$ − ленгмюровская частота, которая связана с радиусом Дебая соотношением $r_D = \upsilon_{Te} / \omega_L = \sqrt{T_e / 4\pi e^2 n}$ ,

$\upsilon_{Te} = \sqrt{T_e / m_e}$ − тепловая скорость электрона,

$T_e$ − температура, выраженная в энергетических единицах.

Для масштабов $l^2 > r_D^2$ в возмущениях электронной концентрации плазмы образуется самосогласованное потенциальное электрическое поле, которое приводит к выполнению условия квазинейтральности, при котором концентрация электронов и ионов оказывается приблизительно одинаковой

$$n_e \approx n_i \approx n.$$

Аналогом уравнения (1) в классической механике является релятивистское соотношение, согласно которому движение электрона в свободном пространстве описывается уравнением

$$m_e^2 c^4 = m_{0e}^2 c^4 + m_e^2 \upsilon_e^2 c^2 . \qquad (2)$$

Здесь $m_{0e}$ − масса покоя,

$m_e = m_{0e} \big/ \sqrt{1 - \upsilon_e^2 / c^2}$ − полная масса электрона,

$\upsilon_e$ − его скорость.

Уравнения (1), (2) можно рассматривать как иллюстрацию принципа дуализма − единства корпускулярных и волновых свойств материи, который является одним из основополагающих в квантовой механике.

Квантовая механика исходит из определения дисперсионного уравнения волны де-Бройля (1923) для свободного электрона

$$\omega = \frac{\hbar}{2m_e} k^2 \qquad (3)$$

Здесь $\hbar$ – постоянная Планка, имеющая размерность действия − механического момента импульса вращающейся частицы, она же определяет и спин электрона, равный $\hbar/2$. Уравнение (3) удовлетворяет решению, в котором свободный электрон описывается волновой функцией $\Psi(\omega,\vec{k}) \propto \exp\{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}\}$, имеющей решение вида плоской волны. Однако в уравнениях (2), (3) масштаб электрона не определен, поэтому в качестве физического размера электрона выбирается его классический радиус

$$r_{cl} = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2{,}82\cdot 10^{-13}\,(\text{см}). \tag{4}$$

Согласно определению (4) полная энергия электрона $m_e c^2$ приравнивается к его электростатической энергии $e^2/r$. При этом классический радиус $r_{cl}$ электрона и измеряемый размер протона $r_p \approx (1{,}2 \div 1{,}3)\cdot 10^{-13}$ (см) – более тяжелой частицы, приблизительно совпадают.

Здесь возникают вопросы, важные для обоснования основных положений электродинамики и квантовой механики − почему существуют стационарные электронные орбиты в атомах, на которых отсутствует электромагнитное излучение, какую роль играет волновая функция − вероятность нахождения электрона в элементе пространства или плотность распределения образованного им вещества.

Существующие противоречия позволяют обратиться к положениям магнитной гидродинамики (МГД). Открытием, которое определило развитие теории МГД, явилась волна Альфвена (1942), фазовая скорость $c_A$ которой связана со скоростью света $c$ значением показателя преломления $n_A = c/c_A = c\sqrt{4\pi n m_i}/B_0$, где $m_i >> m_e$ – масса иона. Альфвеновская волна не сопровождается возмущениями электронной концентрации, и её аналогом является электромагнитная волна, распространяющаяся в волноводе, стенками которого служат силовые линии регулярного магнитного поля $\vec{B}_0$. Теорема Альфвена утверждает, что в идеальной магнитоактивной плазме выполняется условие вмороженности проводящей жидкости в магнитное поле, согласно которому движение плазмы в скрещенных электрическом и магнитном полях $\vec{E} \perp \vec{B}_0$ происходит со скоростью дрейфа $\vec{\upsilon}_\perp = c[\vec{E}_\perp \times \vec{B}_0]/B_0^2$. В локальной − лагранжевой системе отсчета, в которой контур проводящей жидкости покоится, индукционное электрическое поле обращается в нуль ($\vec{E}'_\perp = 0$). Генерация поля $\vec{E}'_\perp$ в идеальной плазме возможна в приближении двухжидкостной МГД при протекании в возмущениях электронной концентрации квазистатического диамагнитного тока $\vec{j}_\perp = c(T_e + T_i)[\vec{B}_0 \times \nabla n]/B_0^2$. Диамагнитный ток приводит к выполнению условия равновесия, согласно которому плотность силы Ампера $[\vec{j}_\perp \times \vec{B}_0]/c$ уравновешивает поперечный к $\vec{B}_0$ градиент газокинетического давления $(T_e + T_i)\nabla n$ возмущения плотности плазмы.

Задача об ускорении плазмы магнитным полем рассматривалась ранее применительно к

вращению сгустка плазмы − $\theta$-пинча, имеющего форму цилиндра, ось которого наклонена под углом $\theta$ к направлению внешнего магнитного поля $\vec{B}_0$ [1, 2]. Кадомцев [3] предложил условие, согласно которому для ускорения плазмы до скорости порядка дрейфовой $\vec{\upsilon}_{i\perp} \approx \vec{j}_{i\perp}/en$ необходимо, чтобы плотность энергии поперечной к оси $\theta$-пинча компоненты поля $B_0\, sin\,\theta$ превышала плотность кинетической энергии вращения возмущения плотности плазмы

$$\frac{B_0^2 \sin^2 \theta}{8\pi} > n \frac{m_i \upsilon_{i\perp}^2}{2}. \tag{6}$$

Подставив в (6) значение дрейфовой скорости $\upsilon_{i\perp} = \frac{c(T_e + T_e)}{eB_0} \frac{\nabla n}{n}$ и $\sin\theta = l_\perp / \sqrt{l_\perp^2 + l_\parallel^2}$, приходим к соотношению между поперечным $l_\perp$ и продольным $l_\parallel$ масштабами возмущения плазмы $l_\perp^2 > r_B \sqrt{l_\perp^2 + l_\parallel^2}$, которое определяет минимальный угол, при котором выполняется условие вмороженности $\theta$-пинча в поле $\vec{B}_0$. Если выполнено противоположное условие, то энергии компоненты поля $B_0 \sin\theta$ недостаточно для ускорения плазмы, и в лабораторной системе отсчета она остается неподвижной. Здесь $r_B$ − внутренний масштаб, значение которого равно

$$r_B = n_A \frac{(T_e + T_i)}{eB_0}. \tag{7}$$

Уравнения двухжидкостной МГД в холодной магнитоактивной плазме имеют решение, которому отвечает совместное вращение гидродинамических и электромагнитных полей в $\vec{k}$-пространстве, подобное прецессии механического волчка в поле силы тяжести, ось которого составляет с направлением силы угол $\theta = \mathrm{const}$. Дисперсионное уравнение дрейфовой МГД-волны имеет вид [4, 5]

$$\omega_D = \frac{(T_e + T_i)}{2m_e \omega_{Be}} k_\perp^2. \tag{8}$$

В уравнении (8) роль постоянной Планка играет величина, пропорциональная моменту импульса вращающегося в магнитном поле электрона $\hbar \to (T_e + T_i)/\omega_{Be}$, где $\omega_{Be} = eB_0/(m_e c)$ − ларморовская частота электрона. Таким образом, параболическое уравнение (8) описывает не плоскую, а спиральную волну, имеющую циркулярную поляризацию. Необходимым условием существования дрейфовой МГД-волны является нарушение симметрии возмущений плотности плазмы относительно направления $\vec{B}_0$ [6]. В ионосфере и магнитосфере Земли дрейфовые МГД-волны могут приводить к развитию вращательно неинвариантной − гиротропной турбулентности плазмы. Однородное комплексное скалярное поле относительных флуктуаций электронной концентрации $\delta n_k$ играет роль волновой функции, нормировкой которой является $\int d^3k\, |\,\delta n_k\,|^2 = \sigma_{\delta n}$ дисперсия относительных флуктуаций электронной концентрации − интеграл по волновым числам от спектра мощности.

В предлагаемых в настоящее время механизмах магнитного динамо, где рассматривается задача о генерации квазистатического магнитного поля вращающейся проводящей жидкостью, существуют два условия, при выполнении которых данный эффект считается возможным, это − нарушение отражательной симметрии и дифференциальное вращение проводящей жидкости [7]. Для развития турбулентности дрейфовых МГД-волн указанные требования также присутствуют.

Воспользуемся соотношениями (7, 8) для определения электромагнитного радиуса электрона. Предположим, что электрон − изотропная частица, то есть $l_\perp \approx l_\parallel \approx r_e$, и оптическая плотность образованного им вещества порядка единицы $n_A \approx 1$, тогда при замене $r_B \to r_e$ получим

$$r_e = r_C = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 3{,}87 \cdot 10^{-11} \text{ (см)}. \qquad (9)$$

Будем рассматривать $r_e$ в качестве электромагнитного радиуса свободного электрона, значение которого $r_e = \lambda\!\!\!^{-}_C = \lambda_{\tilde{N}}/2\pi$ совпадает с длиной волны Комптона. Как известно, эффект Комптона (1923) связан с рассеянием рентгеновского фотона с энергией $\hbar\omega$ на почти свободном электроне с энергией $m_{0e}c^2$, в результате которого электрон получает энергию $m_e c^2$, а длина волны фотона $\lambda$ смещается в красную сторону на величину $\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\chi)$.

Здесь $\lambda_C = 2\pi\hbar/m_e c \approx 2{,}43 \cdot 10^{-10}$ (см), $\chi -$ угол рассеяния рентгеновского кванта. Характер их взаимодействия определяют длины волн фотона и свободного электрона, причем последняя отвечает электромагнитному радиусу электрона $r_e = \lambda\!\!\!^{-}_C = \lambda_{\tilde{N}}/2\pi$, значение которого значительно превышает его классический радиус $r_{cl}$.

Соотношение (4) подобно условию $mc^2/2 = \gamma\, mM/r_g$, при котором более легкое тело массы $m << M$ при центральном падении попадает в черную дыру, имеющую гравитационный радиус $r_g$, и поглощается последней. Однако условие $r_e >> r_p$ не дает электрону возможность приблизиться к протону на необходимое для его поглощения столь малое расстояние.

Будем считать, что радиус протона определяется соотношением (7)

$$r_p = n_p \frac{\hbar}{m_p c} = \frac{e^2}{m_e c}, \qquad (10)$$

в котором $n_p -$ показатель преломления вещества, образующего тело протона. Значение $r_{cl}$ связано с комптоновским радиусом соотношением $r_{cl} = \alpha r_C$, где $\alpha = e^2/\hbar c -$ постоянная тонкой структуры, отвечающая таинственному числу $\alpha^{-1} \approx 137$ [8], которое является безразмерным параметром, состоящим из трех физических констант ($e$, $\hbar$, $c$). Далее предположим, что классический радиус электрона соответствует характерному размеру протона, который действительно соответствует его измеряемому физическому радиусу $r_{cl} \to r_p$, получим $n_p = \alpha\beta \approx 13{,}4$. Здесь $\beta = m_p/m_e \approx 1840 -$ отношение массы протона к массе электрона.

Зоммерфельд (1916 г.) предположил, что константа $\alpha << 1$ характеризует отклонение орбит электронов в атоме водорода от круговых к эллиптическим и приводит к их периодическим смещениям относительно положения центра масс – протона. Это позволило ему построить асимптотическое приближение уравнений квантовой механики, объяснившее существование тонкой структуры в спектрах водородоподобных атомов.

Электронная оболочка, определяющая геометрический размер в модели атома Бора (1913), составляет $r_H = \hbar^2 / m_e e^2 = r_C / \alpha$. Сопоставляя приведенные выше соотношения, получим условие

$$r_e = r_C = \sqrt{r_p r_H},$$

согласно которому электромагнитный радиус электрона равен среднему геометрическому от радиуса протона и радиуса первой боровской орбиты.

Кажется невероятным, что в планетарной модели Резерфорда (1911 г.) электрон, более легкая, чем протон, частица имеет физический размер, существенно превышающий (в 137 раз) размер протона, и может занимать объем $r_e^3 / r_p^3 \approx 2{,}6 \cdot 10^6$, более чем в два миллиона раз превышающий объем протона, а объем электронной оболочки атома водорода во столько же раз превышает объем свободного электрона. Заметим, что таинственное число может быть записано в форме $\alpha^{-1} = (e^{2\pi} + 2e^{-\pi} + 4\pi)/4 = 137{,}...$ и зависит только от иррациональных чисел ($\pi = 3{,}14...,e = 2{,}72...$), которые определяют геометрию пространства [9].

Электроны и протоны в квантовой статистике описываются антисимметричной функцией распределения Ферми-Дирака (1926). Принцип Паули (1940) утверждает, что в любом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Можно предположить, что в пространстве масштабов

$$r_e < \lambda\!\!\!^{-} < r_H$$

электрон существует как вращательно неинвариантная квазистатическая турбулентность, при возбуждении которой сохраняющейся величиной является плотность спиральности $h = (\vec{A} \cdot rot\vec{A})$, где $\vec{A}$ – произвольное вихревое поле. Возможно, что данная турбулентность, отвечающая полуцелому значению спина $\hbar/2$ и антисимметричной функцией распределения электромагнитных полей и вещества, устанавливает правила образования квазистатических волновых структур в микромире.

**Список литературы:**

[1] Haines M.G. // Advances in Physics. 1965. T. 14. №2. P. 167−211.
[2] Thonemann P.C., A.C. Kolb. // The Physics of Fluids. 1964. V. 7. №9. P.1455−1461.
[3] Кадомцев Б.Б. // Коллективные явления в плазме. − М.: Наука. 1988.
[4] Ерухимов Л.М., Е.Н. Мясников // Изв. ВУЗов Радиофизика 1998. Т. 41. №2. С. 194−211.
[5] Мясников Е.Н. // Изв. ВУЗов Радиофизика 1999. Т. 42. №7. С. 691−699.
[6] Мясников Е.Н. // Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность. Международная конференция MCC-14, Москва, 24−27 ноября 2014. Сб. трудов. С. 328−333.
[7] Моффат Г.// Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. − М: Москва. , 1980.
[8] Борн М. // УФН. 1936. Т. 16. №6. С. 697−729.
[9] Лоренц А.К. Теор. и матем. физика. // 1974. Т. 18. №3. С. 427−428.