В.Н. Белых, О.Н. Кащеева
ФГБОУ ВО «ВГУВТ»

СВЯЗАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ

Ключевые слова: связанные динамические системы, инвариантные многообразия, синхронизация, затягивание потери устойчивости

В докладе рассматривается явление затягивания потери устойчивости в связанных динамических системах с переменной нелинейной связью.

Рассматривается динамическая система с переменной во времени нелинейной связью вида

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(t) P\varphi\left(x_j\right), \qquad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Здесь $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^d)$ – d-вектор, содержащий координаты i-го осциллятора; P – диагональная $d \times d$-матрица: $P = diag(p_1, p_2, \dots, p_d)$,
где $p_h = 1$ для $h = 1, \dots, s$ и $p_h = 0$ при $h = s + 1, \dots, d$. Ненулевые элементы матрицы P определяют переменные, которые связывают осцилляторы; φ – монотонная скалярная функция, действующая на каждый аргумент вектора x_j.

Пусть $G = (\varepsilon_{ij}(t))$ – симметричная $n \times n$-матрица, у которой все элементы, кроме диагональных, – неотрицательные и сумма элементов каждой строки равна нулю, т.е. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $\varepsilon_{ij} \geq 0$ для $i \neq j$ и

$$\varepsilon_{ii} = -\sum_{j=1; j\neq i}^{n} \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Система (1) имеет линейное инвариантное многообразие $M = \{x_1 = x_2 = \dots = x_n = x\}$, на котором динамика определяется системой уравнений

$$\dot{x} = F(x). \tag{2}$$

Предположим, что система (2) имеет шар диссипации $\|x\| < R$ и система (1) в малой окрестности инвариантного многообразия M стабилизируема гурвицевой матрицей A. Известно [1], что в этом случае, при условии

$$\varepsilon_{ij}(t) > \varepsilon^* > 0, \qquad i, j = 1, \dots, n, \tag{3}$$

где ε^* – порог синхронизации, многообразие M асимптотически устойчиво, а при невыполнении неравенства (3) синхронизация отсутствует.

В докладе рассматривается задача о возможности сохранения устойчивости многообразия M при нарушении условия (3) в случае, когда $\varepsilon_{ij}(t)$ есть медленно меняющаяся функция времени. Такой неожиданный эффект появляется за счет явления затягивания потери устойчивости [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15–01–08776).

Список литературы:

[1] Belykh V.N., Belykh I.V., Hasler M. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems.// Physica D 195 (2004). – P. 159–187.

[2] Нейштадт А.И., Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось.// Успехи мат. наук. – 1985.– 40, вып. 5. – С. 190–191.

В.Н. Белых, М.С. Киняпина, Н.В. Шестерикова
ФГБОУ ВО «ВГУВТ»

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА

Ключевые слова: системы Лоренцевского типа, странный аттрактор, бифуркации.

Показывается, что 5-параметрическое семейство Лоренцевского типа преобразуется к нормальной форме системы с тремя параметрами. Доказывается существование у этой системы счетного числа периодических орбит.

В работе рассматривается система третьего порядка вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{22}\,x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1\,x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Данная система имеет пятимерное пространство параметров ($a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b$), где матрица $A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ и параметр b удовлетворяют условиям:

$$\Delta = -\det A > 0,\ \sigma = -tr\,A > 0,\ a_{11} > 0,\ b > 0. \tag{2}$$

Из последнего условия и из симметрии системы $(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow (-x_1, -x_2, x_3)$ следует, что система (1) имеет состояние равновесия O (0,0,0) седлового типа и еще два симметричных состояния равновесия, которые при $b\Delta = 0$ сливаются с O.

В случае $a_{11} = a_{12}$, $a_{21} > 0$, $a_{22} = 1$ эта система становится известной системой Лоренца, записанной в специальном виде, моделирующей конвективное движение в атмосфере [1]. Хорошо известно, что странный аттрактор Лоренца [2] играет важную роль в теории «хаоса». Кроме того, топологическая структура, бифуркации и стохастичность аттрактора Лоренца строго определены и хорошо изучены [3,4,5,6].

В последнее время в литературе обсуждались частные случаи системы (1). При $a_{11} = a_{12} > 0$, $a_{22} < 0, a_{21} = trA < 0$ система (1) есть система Чена [7], при $a_{11} = a_{12} > 0$ система (1) численно рассматривалась в [8,9].

Покажем, что 5-параметрическое семейство (1) имеет нормальную форму системы с тремя параметрами [10,11,12]. Преобразуем время, параметры и координаты по формулам:

$$\tau = \sqrt{\Delta}\cdot t,\ \lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}},\ \alpha = \frac{b}{\sqrt{\Delta}},\ \beta = \frac{2a_{11} - b}{\sqrt{\Delta}},$$

$$x_1 = \sqrt{2\Delta}\cdot x,\ x_2 = a_{12}^{-1}\sqrt{2\Delta}\cdot\left(a_{11}x + \sqrt{\Delta}\cdot y\right), \tag{3}$$