[2] Нейштадт А.И., Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось.// Успехи мат. наук. – 1985.– 40, вып. 5. – С. 190–191.

В.Н. Белых, М.С. Киняпина, Н.В. Шестерикова
ФГБОУ ВО «ВГУВТ»

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА

Ключевые слова: системы Лоренцевского типа, странный аттрактор, бифуркации.

Показывается, что 5-параметрическое семейство Лоренцевского типа преобразуется к нормальной форме системы с тремя параметрами. Доказывается существование у этой системы счетного числа периодических орбит.

В работе рассматривается система третьего порядка вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{22}\,x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1\,x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Данная система имеет пятимерное пространство параметров ($a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b$), где матрица $A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$ и параметр b удовлетворяют условиям:

$$\Delta = -\det A > 0,\ \sigma = -tr\,A > 0,\ a_{11} > 0,\ b > 0. \tag{2}$$

Из последнего условия и из симметрии системы $(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow (-x_1, -x_2, x_3)$ следует, что система (1) имеет состояние равновесия O (0,0,0) седлового типа и еще два симметричных состояния равновесия, которые при $b\Delta = 0$ сливаются с O.

В случае $a_{11} = a_{12}$, $a_{21} > 0$, $a_{22} = 1$ эта система становится известной системой Лоренца, записанной в специальном виде, моделирующей конвективное движение в атмосфере [1]. Хорошо известно, что странный аттрактор Лоренца [2] играет важную роль в теории «хаоса». Кроме того, топологическая структура, бифуркации и стохастичность аттрактора Лоренца строго определены и хорошо изучены [3,4,5,6].

В последнее время в литературе обсуждались частные случаи системы (1). При $a_{11} = a_{12} > 0$, $a_{22} < 0, a_{21} = trA < 0$ система (1) есть система Чена [7], при $a_{11} = a_{12} > 0$ система (1) численно рассматривалась в [8,9].

Покажем, что 5-параметрическое семейство (1) имеет нормальную форму системы с тремя параметрами [10,11,12]. Преобразуем время, параметры и координаты по формулам:

$$\tau = \sqrt{\Delta}\cdot t,\ \lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}},\ \alpha = \frac{b}{\sqrt{\Delta}},\ \beta = \frac{2a_{11} - b}{\sqrt{\Delta}},$$

$$x_1 = \sqrt{2\Delta}\cdot x,\ x_2 = a_{12}^{-1}\sqrt{2\Delta}\cdot\left(a_{11}x + \sqrt{\Delta}\cdot y\right), \tag{3}$$

$$x_3 = a_{12}^{-1}\Delta \cdot \left(z + x^2\right)$$

При этом система (1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = y, \\ \dfrac{dy}{d\tau} = \left(1 - z - x^2\right)x - \lambda y, \\ \quad \dfrac{dz}{d\tau} = -\alpha z + \beta x^2. \end{cases} \tag{4}$$

Приведем основные свойства 3-параметрического семейства (4):

1) Система (4) обладает симметрией $\left(x, \mathrm{y}, z\right) \longleftrightarrow \left(-x, -y, z\right)$

2) Система (4) для $\alpha > 0$ имеет три состояния равновесия: начало координат О – седловая точка с одномерным неустойчивым многообразием W_0^u, и еще два симметричных состояния равновесия, которые при $b\Delta = 0$ сливаются с О. При $\beta = 0$ система (4) имеет устойчивое интегральное многообразие $W_0^S : \left\{z = 0\right\}$ с динамической системой на нем вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \left(1 - x^2\right)x - \lambda y \end{cases} \tag{5}$$

3) Существует бифуркационная поверхность $g\left(\alpha, \beta, \lambda\right) = 0$ такая, что $g\left(\alpha, 0, 0\right) = 0$ соответствует двум симметричным гомоклиническим контурам (петлям), образованным W_0^u.

4) При $\beta > 0$ стандартный аттрактор Лоренца появляется, когда неустойчивое многообразие W_0^u попадает на устойчивые 2d – многообразия двух симметричных седловых циклов, рожденных из «гомоклинической бабочки». Рождение этой «гомоклинической бабочки» приводит к появлению хаотического множества траекторий.

5) Бесконечное множество бифуркаций сопровождает переход как от различных типов аттракторов Лоренца так и других множеств притягивающих предельных множеств, которые демонстрируют различные типы квазиаттракторов [13,14].

Полученные результаты подтверждены результатами численного счета. На рис.1 представлены проекции фазовых траекторий системы (4) для значений параметров $\lambda = \dfrac{7}{\sqrt{735}}$, $\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{735}}$, $\beta = \dfrac{67}{\sqrt{735}}$ ($a_{11} = a_{12} = 35$, $a_{21} = -7$, $a_{22} = -28$) при начальных условиях $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$.

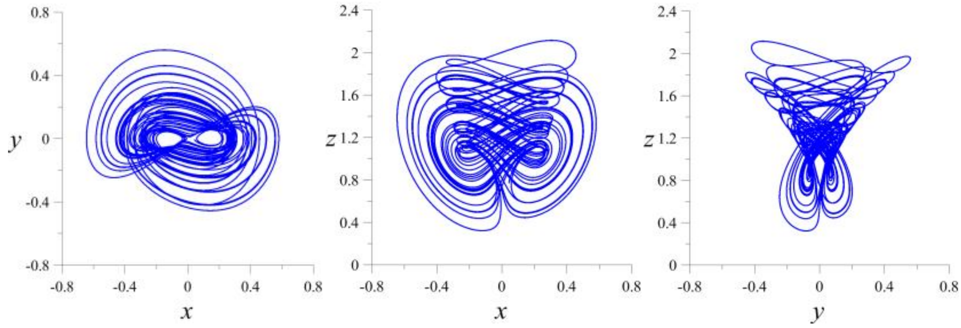

Рис. 1

Основной результат может быть сформулирован в виде следующего утверждения:

Теорема. Существует бифуркация двух гомоклинических орбит, в результате которой в системе появляется нетривиальная гиперболическая компонента неблуждающего множества, содержащая счетное число седловых периодических орбит.

Список литературы:

[1] Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci., vol.20 . – 1963. – C. 130–141.

[2] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence, Comm.Math. Physics, vol.20(2). – 1971 – C. 167–192.

[3] Afraimovich V.S., Bykov V.V. and Silnikov L.P. On the appearance and structure of Lorenz attractor, DAN SSSR, vol.234. – 1977– C.336-339.

[4] Williams R. The structure of Lorenz attractors, Publ. Math. IHES,vol.50. – 1979– C. 101–152.

[5] Sinai Ya.G. Stochasticity of dynamical systems attractor in the Lorenz model, Nonlienear Waves, ed. Gaponov-Grekhov,A.V. (Nauka).– 1980.– C. 192–212.

[6] Sparrow C. The Lorenz equations: Bifurcations, Chaos and Strange attractors,Springer-Verlag, NY. . – C. – 1982.

[7] Chen G., Ueta T. Yet another chaotic attractor// Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 9(7) . –1999. – C. 1465–1466.

[8] Lu J., Chen G. A new chaotic attractor coined, Int.J. Bifurcation and Chaos, vol. 12. – 2002. – C. 659–661.

[9] Lu J., Chen G., Zhang S. Controlling in between the Lorenz and the Chen systems// Int.J. Bifurcation and Chaos, vol.12(6). – 2002. – C. 1417–1422.

[10] Belykh V.N. Bifurcations of separatrices of a saddle point of the Lorenz system // Differential equations, vol.20(10). – 1984. – C. 1184–1191.

[11] Belykh V.N. Generation of a structurally stable doubly asymptotic trajectory in a system with slow varying parameter Differential`nye Uravneniya 11 (1975)// English transl. in Differential Equtions 11 (1975). –1975. – C. 2083–2085.

[12] Belykh V.N. Homoclinic and heteroclinic linkages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps //Translations of the American Mathematical Society-Series 2. – 2000. – T. 200. – C. 51–62.

[13] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P.,Turaev D.V. Normal forms and Lorenz attracors, Int.J. Bifurcation and Chaos, 3(5). – 1993. – C. 1123–1139.

[14] Shilnikov L.P. Math problems of nonlinear dynamics: A tutorial // Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 7(9). – 1997– C. 1953–2001.