ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ВНУТРЕННИХ ВОДНЫХ ПУТЕЙ В БАССЕЙНАХ ВЕЛИКИХ РЕК
Интернет журнал широкой научной тематики.
Выпуск 5, 2016 г.
ISBN 978-5-901772-51-0

УДК 533. 951

Т.М. Заборонкова, д.ф.-м. н., профессор ФГБОУ ВО «НГТУ им. Р.Е. Алексеева», 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24
Е.Н. Мясников, д.ф.-м. н., зав. кафедрой физики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», 603950, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5

МГД ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

Ключевые слова: магнитная гидродинамика вихревые поля, дрейфовая МГД-волна, турбулентность плазмы

Получено решение системы уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики (МГД) при учете индукционного электрического поля, генерируемого диамагнитным током. Показано, что данное поле может приводить к возбуждению вращательно неинвариантных волновых структур – дрейфовых МГД-волн, которые имеют круговую поляризацию и описываются параболическим волновым уравнением. В условиях ионосферы и магнитосферы Земли данные волны могут привести к развитию низкочастотной гиротропной турбулентности плазмы.

В приближении одножидкостной магнитной гидродинамики в плазме, близкой к идеальной, распространяется волна Альфвена, которая описывается системой гиперболических уравнений [1]

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\top}{\partial t} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}_\top \times \mathbf{B}_\top] + \mathrm{D_B}\Delta\mathbf{B}_\top\,, \qquad m_i n\frac{\partial \mathbf{v}_\top}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\mathbf{B}_\top \times \mathbf{B}_0]\,.$$

Здесь $\mathbf{B}_0$ – индукция внешнего магнитного поля, m_i. – масса иона, $n = n_i = n_e$ – квазинейтральная концентрация плазмы. Векторы возмущений магнитного поля $\mathbf{B}_\top$ и $\mathbf{v}_\top$ и дрейфовой скорости плазмы $\mathbf{v}_\top = \mathbf{v}_{e\top} = \mathbf{v}_{i\top}$ являются тороидальными вихревыми полями, $\mathrm{D_B} = c^2/4\pi\sigma_{e||}$ – коэффициент диффузии магнитного поля, $\sigma_{e||} = e^2n/m_e\nu_e$ – продольная проводимость. Далее будем рассматривать низкотемпературную плазму, в которой электроны и ионы сильно замагничены:

$$\beta = \frac{8\pi n(T_e + T_i)}{B_0^2} \ll 1\,; \qquad \frac{\nu_e}{\omega_{B_e}} \ll \frac{\nu_{in}}{\omega_{B_i}} \ll 1\,.$$

Здесь T_e и T_i – электронная и ионная температуры, ν_{in}, $\nu_e= (\nu_{en} + \nu_{ei})$ – эффективные частоты соударений ионов и электронов с нейтральными молекулами и между собой, $\omega_{Be}=eB_0/m_ec$, $\omega_{Bi}=eB_0/m_ic$ – гирочастоты. Индукционное электрическое поле $\mathbf{E}_\perp$ в лабораторной (эйлеровой) системе отсчета связано с полем $\mathbf{E}'_\perp$ в локальной (лагранжевой) системе, движущейся вместе с контуром проводящей жидкости, преобразованием Лоренца

$$\mathbf{E}'_\perp = \mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\top \times \mathbf{B}_0]\,.$$

Для полей вида плоских волн $\mathbf{B}_{\mathbf{k}\top}$, $\mathbf{v}_{\mathbf{k}\top} \propto \exp\{-i\,\omega t + i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\}$ фазовая скорость волны равна

$$v_{ph} = \pm\frac{c}{\mathrm{n_A}}\sin\theta = \pm\frac{B_0}{\sqrt{4\pi m_i n}}\sin\theta$$

и зависит от угла θ между направлениями волнового вектора $\mathbf{k}$ и нормалью к полю $\mathbf{B}_0$, $\mathrm{n_A}= c\,(4\pi m_i n)^{1/2}/\mathrm{B}_0$ – показатель преломления волны Альфвена. Введем дополнительно определения полоидальных вихревых полей: плотности тока $\mathbf{j}_{\mathbf{k}\theta} = i\,[\mathbf{k}\times\mathbf{B}_{\mathrm{T}}]c/4\pi$, вихря дрейфовой скорости $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{k}\theta} = i\,[\mathbf{k}\times\mathbf{v}_{\mathrm{T}}]$ и рассмотрим поляризацию гидродинамических (ГД) и электромагнитных (ЭМ) полей. Как следует из рис. 1, вихревые поля дрейфовой скорости $\mathbf{v}_{\mathbf{k}\mathrm{T}}$ и её вихря $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{k}\theta}$, возмущения магнитного поля $\mathbf{B}_{\mathbf{k}\mathrm{T}}$ и плотности тока $\mathbf{j}_{\mathbf{k}\theta}$ вместе с вектором **k** образуют две взаимно ортогональные тройки, вложенные друг в друга так, что $\mathbf{B}_{\mathbf{k}\mathrm{T}} \uparrow\uparrow \mathbf{v}_{\mathbf{k}\mathrm{T}}$ и $\mathbf{j}_{\mathbf{k}\theta} \uparrow\uparrow \mathbf{\Omega}_{\mathbf{k}\theta}$. Вектор $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\perp}$ строго ортогонален внешнему магнитному полю $\mathbf{B}_0$, лежит в плоскости $(\mathbf{k},\mathbf{B}_0)$ и составляет угол θ с вектором **k**. Он имеет как вихревую составляющую $\mathrm{E}_{\mathbf{k}\perp}\sin\theta$, ортогональную **k**, так и потенциальную $\mathrm{E}_{\mathbf{k}\perp}\cos\theta$, направленную вдоль **k**. В данной волне отсутствуют возмущения электронной концентрации, поэтому её можно рассматривать как электромагнитную, направляющими структурами которой являются силовые линии поля $\mathbf{B}_0$. В идеально плазме ($\sigma_{e||}\to\infty$), электрическое поле $\mathbf{E}'_{\mathbf{k}\perp}=0$ и выполняется условие “вмороженности’’ плазмы в магнитное поле. При наличии продольной проводимости затухание волны происходит изотропно (независимо от направления **k**) с коэффициентом D_{B}.

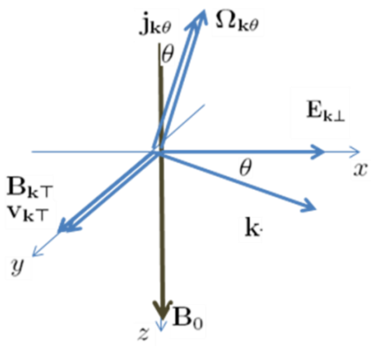

Рисунок 1

Рассмотрим двухжидкостное приближение, в котором в плазме может существовать дрейфовая МГД-волна [2]. Для нахождения индукционного электрического поля воспользуемся стационарным уравнением движения для электронной компоненты плазмы – обобщенный закон Ома [3]:

$$T_e\nabla n = -en\mathbf{E} - \frac{en}{c}[\mathbf{v}_{i\mathrm{T}}\times\mathbf{B}_0] + \frac{1}{c}[\mathbf{j}_{\mathrm{T}}\times\mathbf{B}_0]\,.$$

Здесь $\mathbf{j}_{\mathrm{T}} = \mathrm{en}(\mathbf{v}_{i\mathrm{T}} - \mathbf{v}_{e\mathrm{T}})$ плотность диамагнитного тока, $\mathbf{v}_{i\mathrm{T}}$, $\mathbf{v}_{e\mathrm{T}}$ – скорости ионной и электронной компонент соответственно, $p = n(T_e+T_i)$ − газокинетическое давление. Электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi_e + \mathbf{E}'_\perp$ представляет сумму самосогласованного внутреннего поля, потенциал которого определяет электронная компонента $\varphi_e = (T_e/e)\ln(n)$, и индукционного поля. Потенциальное поле приводит к установлению квазинейтральности плазмы. Индукционное электрическое поле в локальной системе отсчета ($\mathbf{v}_{i\mathrm{T}}=0$) равно

$$\mathbf{E}'_\perp = \frac{1}{cen}[\mathbf{j}_{\mathrm{T}}\times\mathbf{B}_0] = \frac{(T_e+T_i)}{e}\frac{\nabla_\perp n}{n}\,.$$

В этом случае суммарное электрическое поле приобретает вид:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi_e + \mathbf{E}'_\perp = -\frac{T_e}{e}\frac{\nabla n}{n} + \frac{(T_e+T_i)}{e}\frac{\nabla_\perp n}{n} = -\frac{T_e}{en}\frac{\partial n}{\partial z}\cdot\mathbf{e}_z + \frac{T_i}{en}\nabla_\perp n$$

Последнее является необходимым условием для протекания в плазме режима двуполярной диффузии, при котором релаксацию возмущений электронной концентрации определяет анизотропное диффузионное уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_{a\perp}\Delta_\perp n + D_{a\|}\frac{\partial^2 n}{\partial z^2}\,.$$

Диффузионный коэффициент в направлении $\mathbf{B}_0$ равен коэффициенту амбиполярнойдиффузия изотропной плазмы $\mathrm{D}_a=(T_e+T_i)/m_i\nu_{in}$, в поперечном к $\mathbf{B}_0$ направлении – коэффициенту амбиполярной поперечной диффузии $\mathrm{D}_{a\perp} = (T_e+T_i)\nu_e/m_e\omega^2_{Be} << \mathrm{D}_a$ [4,5]. При двуполярной диффузии плазмы отсутствуют токи “короткого замыкания”, и данный режим диффузии является существенно более медленным по сравнению униполярным [6].

Для соотношения поперечного и продольного к $\mathbf{B}_0$ масштабов неоднородностей $l_\perp/l_z<<1$ возмущение магнитного поля, создаваемое диамагнитным током, составляет $\delta B_\theta = B_\theta/B_0 \approx -\beta/2<<1$ и его влиянием на динамику возмущений плотности плазмы можно пренебречь. Подставим поле **E** в уравнение электромагнитной индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\theta}{\partial t} - \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}_{i\top} \times \mathbf{B}_0] + c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}'_\perp = 0$$

Здесь $\mathbf{B}_\theta$ − возмущение магнитного поля, создаваемое диамагнитным током. При $\partial\mathbf{B}_\theta/\partial t$ = 0 приходим к дополнительному условию равновесия плазмы

$$[\boldsymbol{\Omega}_{i\theta} \times \mathbf{B}_0] = \frac{c(T_e + T_i)}{e}\,\mathrm{rot}\left(\frac{\nabla_\perp n}{n}\right),$$

где $\boldsymbol{\Omega}_{i\theta}$ − дрейфовая частота возмущений плотности плазмы.

Согласно критерию, предложенному Кадомцевым [3], для ускорения возмущения плотности плазмы до скорости порядка дрейфовой необходимо, чтобы плотность энергии внешнего магнитного поля превышала плотность кинетической энергии возмущения плазмы

$$\frac{B_0^2 \sin^2\theta}{8\pi} > n\frac{m_i v_{i\top}^2}{2}.$$

Подставляя значение дрейфовой скорости $v_{i\top} = \Omega_{i\theta} l_\perp$ и $\sin\theta = l_\perp \Big/ \sqrt{l_\perp^2 + l_z^2}$, приходим к условию $l_\perp^2 > r_B\sqrt{l_\perp^2 + l_z^2}$. Здесь r_B = $n_A(Te+Ti)/eB_0$ – масштаб, определяющий степень проникновения магнитного поля в плазму. В этом случае движение возмущения плотности плазмы в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}_0$, определяет более тяжелая ионная компонента, а электронная компонента в лабораторной системе отсчета остается неподвижной − “вмороженной” в поле $\mathbf{B}_0$.

Рассмотрим волновые возмущения и представим их в виде:

$$\{\mathbf{v}_{\mathbf{k}\top},\ \ \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}\theta},\ \ \mathbf{E}_{\mathbf{k}\perp},\ \ \mathbf{j}_{\mathbf{k}\top},\ \ \mathbf{B}_{\mathbf{k}\theta}\} \cdot \delta n_{\mathbf{k}}.$$

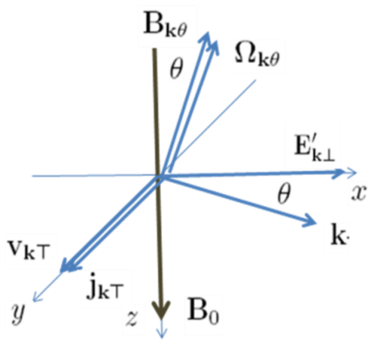

Рисунок 2

Здесь каждое возмущение представляет произведение соответствующего векторного поля (оператора в **k**-пространстве) на относительное возмущение электронной концентрации $\delta n_{\mathbf{k}} \propto \exp\{\,i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\}$. Все операторы полей могут быть выражены друг через друга, причем их направления не зависят от знака возмущения электронной концентрации. Поляризация ГД и ЭМ операторов полей в дрейфовой волне показана на рис. 2. Дополнительное условие квазистатического равновесия плазмы приобретает вид

$$[\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}_0] = -\frac{c(T_e + T_i)}{e}[\mathbf{k} \times \mathbf{k}_\perp]$$

Оно является действительным векторным уравнением, которое определяет связь между компонентами вектора вихря дрейфовой скорости $\Omega_{\mathbf{k}x}$, $\Omega_{\mathbf{k}y}$ и волновым вектором **k**. Компонента $\Omega_{\mathbf{k}z}$ может быть определена из условия div $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}}$ = 0. Решением данного уравнения является дрейфовая частота

$$\Omega_{\mathbf{k}z} = -\frac{c(T_e + T_i)}{eB_0}k_\perp^2.$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}\theta} \uparrow\uparrow \mathbf{B}_{\mathbf{k}\theta}$. Поскольку плазма является диамагнитной средой, вращение возмущений $\delta n_{\mathbf{k}} > 0$ является левовинтовым к $\mathbf{B}_0$, и внешнее магнитное поле ослабляется. Направления волнового вектора **k** и векторов ГД и ЭМ полей в течение времени не изменяются в пространстве, поэтому поляризация возмущений является линейной. Дрейфовая частота отрицательна, и волновое решение отсутствует.

Возможна другая поляризация векторов ГД и ЭМ полей, при которой $\mathbf{B}_{\mathbf{k}\theta} \uparrow\downarrow \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}\theta}$. В этом случае решение уравнения электромагнитной индукции может быть представлено в виде вращения − “прецессии” вектора k вокруг направления $\mathbf{B}_0$

$$k_x = k_\perp \cos\{\Omega_{\theta z}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\}, \qquad k_y = k_\perp \sin\{\Omega_{\theta z}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\}, \qquad k_z = \mathrm{const}$$

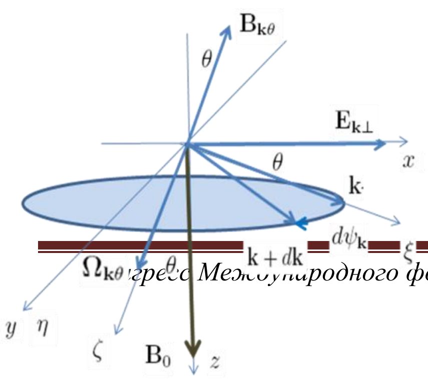

Рисунок 3

Геометрия возмущений полей представлена на рис. 3. Здесь ξ, η, ζ – локальная система отсчета, в которой ось ξ совпадает с направлением волнового вектора **k**, ось ζ, составляет угол θ с полем $\mathbf{B}_0$. В случае, когда **k** совершает поворот на угол $d\psi_{\mathbf{k}} = \delta n_{\mathbf{k}}$, уравнение электромагнитной индукции принимает вид:

$$\frac{1}{c}\frac{dB'_{0\mathbf{k}\xi}}{dt} = -ikE'_{\mathbf{k}\perp}\sin\theta\,.$$

Здесь $E'_{\mathbf{k}\perp}$ − индукционное электрическое поле, генерируемое в локальной системе отсчета при повороте компоненты магнитного поля $dB'_{0\mathbf{k}\xi}=B_0\sin\theta\, d\psi_{\mathbf{k}}$ вокруг оси ζ. Положив возмущения полей изотропными в плоскости, ортогональной $\mathbf{B}_0$, после усреднения по времени с учетом соотношения $\left\langle k_x^2+k_y^2\right\rangle_t = k_\perp^2/2$ приходим к дисперсионному уравнению

$$\Omega_z = \frac{c(T_e+T_i)}{2eB_0}k_\perp^2\,.$$

Здесь по сравнению со случаем, рассмотренным выше (см. рис. 2), направление дрейфовой частоты меняет знак $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{k}\theta}\uparrow\downarrow\mathbf{B}_{\mathbf{k}\theta}$, при этом значение оператора вращения становится положительным и отвечает параболическому волновому уравнению. В лабораторной системе отсчета дрейфовая скорость заряженных частиц и индукционное электрическое поле связаны такими же уравнениями, как и в приближении одножидкостной МГД

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\perp} = -\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}_{\mathbf{k}\top}\times\mathbf{B}_0\right]; \qquad \mathbf{v}_{\mathbf{k}\top} = \frac{c[\mathbf{E}_{\mathbf{k}\perp}\times\mathbf{e}_z]}{B_0}\,.$$

Магнитоактивная плазма является гиротропной средой, в которой плотность момента импульса определяет ионная компонента, поэтому можно ожидать, что вращение возмущений $\delta n_{\mathbf{k}} < 0$ будет преимущественным Поляризация возмущений плотности тока и магнитного поля в альфвеновской волне $\mathbf{j}_{\mathbf{k}\theta}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{k}\top}$ и дрейфовой МГД-волне $\mathbf{j}_{\mathbf{k}\top}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{k}\theta}$ являются строго взаимно ортогональными. При этом эти волны имеют существенно разные декременты затухания. В условиях верхней ионосферы Земли дрейфовые волны могут приводить к развитию гиротропной – вращательно неинвариантной турбулентности плазмы.

Список литературы:

[1] Alfven H. / Arkiv. Mat. Astron. Fysic, 1942. V.29 (B). N2. P.7.
[2] Мясников Е.Н. / Изв. Вузов Радиофизика, 1999. Т. 42, С. 691.
[3] Кадомцев Б.Б. / Коллективные явления в плазме, М. Наука, 1988.
[4] Гешман Б.Н. / Радиотехника и электроника, 1956. Т. 1. № 6. С. 720.
[5] Голант В.Е. / УФН, 1963. Т. 79. № 3. С. 377.
[6] Гуревич А.В., Е.Е. Цедилина. / УФН. 1967. Т. 91. № 4. С. 609.