ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ВНУТРЕННИХ ВОДНЫХ ПУТЕЙ В БАССЕЙНАХ ВЕЛИКИХ РЕК
Интернет журнал широкой научной тематики.
Выпуск 5, 2016 г.
ISBN 978-5-901772-51-0

УДК 517

Е.А. Дунцева, доцент, к.ф.-м.н., ФГБОУ ВО «ВГУВТ»
603950, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5а

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ СВЕРХУ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ключевые слова: дифференциальные неравенства, непрерывный метод, сходимость.

Рассмотрены линейные дифференциальные неравенства третьего порядка, получены оценки сверху их решений.

Рассмотрим дифференциальное неравенство третьего порядка

$$\begin{cases} r''' + \lambda\, r'' + \mu\, r' + \gamma\, r \le B(t), \\ r(t_0) = r_0,\ r'(t_0) = r_0',\ r''(t_0) = r_0'', \end{cases} \tag{1}$$

где λ, μ, γ - постоянные.

Если *z (t)*- решение задачи Коши

$$\begin{cases} z''' + \lambda z'' + \mu\, z' + \gamma\, z = B(t), \\ z(t_0) = r_0,\ z'(t_0) = r_0',\ z''(t_0) = r_0'', \end{cases}$$

то справедливо неравенство $r(t) \le z(t)$ (см.[1,п.24]). С помощью данного утверждения получим оценки решений неравенства (1) в зависимости от корней характеристического уравнения

$$k^3 + \lambda k^2 + \mu\, k + \gamma = 0. \tag{2}$$

В случае действительных различных корней уравнения (2) оценка имеет вид

$$r(t) \le \int_{t_0}^{t} B(s)\left(\frac{e^{k_1(t-s)}}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)} + \frac{e^{k_2(t-s)}}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)} + \frac{e^{k_3(t-s)}}{(k_2-k_3)(k_1-k_3)}\right)ds + \\ + c\left(\frac{e^{k_1(t-t_0)}}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)} + \frac{e^{k_2(t-t_0)}}{(k_1-k_2)(k_3-k_2)} + \frac{e^{k_3(t-t_0)}}{(k_1-k_3)(k_2-k_3)}\right), \tag{3}$$

здесь $c = \max\limits_{i,j} | r_0 k_i k_j - r_0'(k_i + k_j) + r_0'' |$.

Если характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $(k_1 \ne k_2 = k_3)$, то получаем оценку

$$r(t) \le r_0 e^{k_2(t-t_0)} + \left| \frac{1}{(k_2-k_1)^2}\left(\int_{t_0}^{t} B(s)\left(e^{k_1(t-s)} + ((k_2-k_1)(t-s)-1)e^{k_2(t-s)}\right)ds\right) + \\ + \frac{1}{(k_2-k_1)^2}\left(ae^{k_1(t-t_0)} + (b(t-t_0)-a)e^{k_2(t-t_0)}\right)\right|, \tag{4}$$

где $a = r_0'' - 2k_2 r_0' + {k_2}^2 r_0$, $b = (k_2-k_1)(r_0'' - (k_1+k_2)r_0' + k_1 k_2 r_0)$.

В случае двух комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения (2) $(k_1 \ne k_{2,3} = \alpha \pm \beta i)$, оценка решений неравенства (1) имеет вид:

$$r(t)\le \frac{1}{(k_1-\alpha)^2+\beta^2}\left(\int\limits_{t_0}^{t} B(s)\left(e^{k_1(t-s)}+(\frac{1}{\beta}|\alpha-k_1|+1)e^{\alpha(t-s)}\right)ds+c_1(e^{k_1(t-t_0)}+e^{\alpha(t-t_0)})\right), \tag{5}$$

где

$c_1=\max|r_0''-2\alpha r_0'+(\alpha^2+\beta^2)r_0|,\ |(\alpha-k_1)r_0''-(\alpha^2-\beta^2-k_1^2)r_0'+k_1(\alpha^2-\beta^2-\alpha k_1)|+$

$+|\beta r_0''+2\alpha\beta\ r_0'-k_1\beta(k_1-2\alpha)|)$

Необходимость получения такого рода оценок решений дифференциальных неравенств относительно нормы разности между решением *x(t)* исходной и решением x^* регуляризованной задачи $r(t)=\left\|x(t)-x^*\right\|/2$ возникает при установлении достаточных условий сильной сходимости непрерывного метода третьего порядка для решения нелинейного уравнения *Ax=f, A:H*$\to$ *H* –монотонный оператор, *H*-гильбертово пространство. Отметим, что в настоящее время непрерывные методы, сводящиеся к решению задачи Коши для дифференциального уравнения некоторого порядка, представляют большой интерес для решения нелинейных задач. Методы первого и второго порядка исследовались, например, в работах [2,3]. Использование методов более высокого третьего порядка позволяет полнее учесть в начальных условиях априорную информацию об искомом решении, поэтому получение оценок вида (3)-(5) актуально .

Список литературы

[1] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Уфа,1972.-289 с.

[2] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач.-М.: Наука, 1981.-400с.

[3]. Рязанцева И.П. Методы второго порядка для аккретивныхвключений в банаховом пространстве. ДУ,50:9(2014), 1264-1275.