ISBN 978-5-901722-54-1

УДК 621.039

В.С. Востоков, главный специалист, АО «ОКБМ Африкантов»
603074, Бурнаковский проезд, 15
С.В. Лебедева., к.т.н., доцент, каф. радиоэлектроники ФГБОУ ВО «ВГУВТ»
603951, Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Ключевые слова: устойчивость, аналитические исследования, учет инерции, система управления.

Исследуется влияние учета дополнительного количества инерционных звеньев на область устойчивости системы управления движением тела.

При решении задачи устойчивости системы неизбежно встает вопрос о количестве учитываемых в математической модели инерционных звеньев. Увеличение количества инерционных звеньев заметно осложняет аналитические исследования. Часто исследователи делают оценки с минимальным количеством учитываемых инерций для численных расчетов, в которых можно не ограничивать количество учитываемых эффектов. Тем не менее, представляет интерес исследовать изменение области устойчивости при увеличении числа учитываемых инерционных звеньев.

Решение данной задачи будем рассматривать на примере простейшей системы управления движением тела под действием знакопеременной силы на материальную точку в линейном приближении. Такая постановка применима для достаточно большого количества задач, в частности, для задач управления судном с колесным движительно-рулевым комплексом или применительно к задаче электромагнитного подвеса ротора.

Учет одной инерции (рис. 1) ограничивает область устойчивости в плоскости параметров системы управления соотношением $K_d > \tau K_p$. Здесь K_d *и* K_p– дифференциальный и пропорциональный коэффициенты системы управления, τ – постоянная времени инерционного звена [1].

Ранее была рассмотрена устойчивость системы с учетом двух инерционных звеньев. Проделав аналогичные процедуры для системы четвертого порядка [2], получим при $K_p = 0$, $K_{d1} = 0$, $K_{d2} = \frac{2}{\tau}$, $K_{p\max} = \frac{0.25}{\tau^2}$.

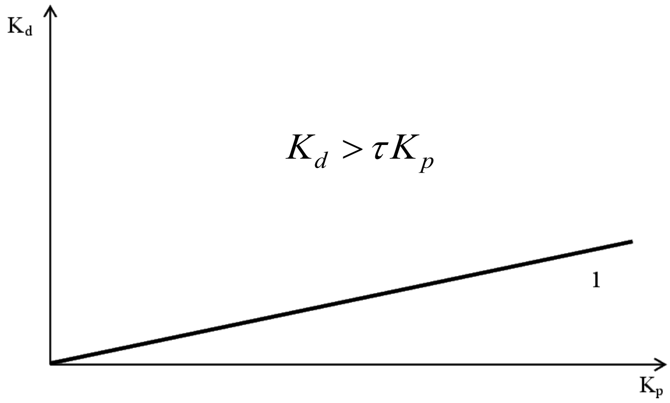

Рис. 1. Область устойчивости системы управления движением тела под действием знакопеременной силы на материальную точку в линейном приближении с учетом одного инерционного звена.

Учет двух инерций превращает область устойчивости в остров, ограниченный осями координат и параболой, получено соотношение K_d *и* K_p в зависимости от величин постоянных времени инерционных звеньев (рис. 2). Влияние соотношений постоянных времени на область устойчивости не рассматривалось, показано лишь, что с уменьшением постоянных времени область устойчивости растет.

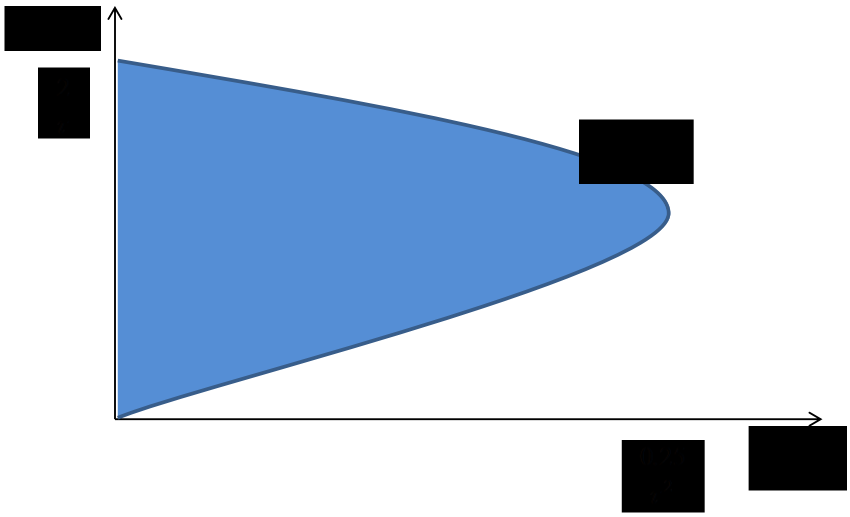

Рис. 2. Область устойчивости с учетом двух инерционных звеньев.

В настоящей работе делается попытка рассмотреть следующие вопросы:

- учет в математической модели трех инерционных звеньев;
- влияние третьей инерции на устойчивость, анализ области устойчивости системы пятого порядка;
- влияние учета четвертой инерции на устойчивость системы.

1. Математическая модель системы.

Рассматриваем систему типа $ma = -F$ $F = \dfrac{K_d \dot{X} + K_p X}{(\tau p + 1)^3}$, где m, a - масса и ускорение тела, F– сила, формируемая системой управления по сигналу измеренной координаты и вычисленной скорости перемещения тела (в предположении ПД регулятора), τ – постоянные времени всех трех инерций.

Характеристическое уравнение системы имеет следующий вид

$$\tau^3 p^5 + 3\tau^2 p^4 + 3\tau p^3 + p^2 + K_p + K_d p = 0\ . \qquad (1)$$

По критерию Рауса - Гурвица устойчивость системы обеспечивается в области, ограниченный осями координат и параболой.

При $K_p = 0,\ K_{d1} = 0\ ,\quad K_{d2} = \frac{8}{9\tau}$.

При $K_{dc} = \frac{4}{9\tau}$ получаем выражение для K_p, из которого получаем одно положительное значение решения уравнения $\tau^4 K_p{}^2 + \frac{64}{3}\tau^2 K_p - \frac{16}{9} = 0\ ,\ K_{p\max} = \frac{0.082}{\tau^2}$.

Таким образом, область устойчивости системы в плоскости параметров системы управления при учете третьего инерционного звена существенно уменьшается. При $K_p = 0$ – немного больше, чем в два раза, по максимальному значению K_p – больше, чем в три раза. Полученный результат - качественно ожидаемый, поскольку увеличилось суммарное запаздывание в системе управления, и одновременно изменился вид запаздывающего звена (ближе к чистому запаздыванию).

1. Анализ влияния разницы величин инерций на устойчивость.

Приведенные выше выкладки сделаны для случая равенства всех инерционных звеньев. Попытки выявить влияние уменьшения одной инерции по отношению двух других по стандартной схеме анализа устойчивости не позволяет решить поставленную задачу. Уже при анализе устойчивости системы четвертого порядка уменьшение одной постоянной времени формально приводит к условию устойчивости системы третьего прядка. При относительно малой величине постоянной времени, основная постоянная времени сокращается, что противоречит исходной модели. Поэтому для выяснения влияния дополнительно учитываемого инерционного звена на устойчивость необходимо анализ вести без перехода к безразмерному времени.

$$\tau_1^2\tau_2 p^5{}_t + (2\tau_1\tau_2 + \tau_1^2)p^4{}_t + (2\tau_1 + \tau_2)p^3 + p^2 + K_d p + K_p = 0$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$a_0 = \tau_1^2\tau_2$

$a_1 = 2\tau_1\tau_2 + \tau_1^2$

$a_2 = 2\tau_1 + \tau_2$

$a_3 = 1$

$a_4 = K_d$

$a_5 = K_p$

По критерию Гурвица для устойчивости системы должны выполняться следующие условия:

1) $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$,
2) $(a_1 a_2 - a_0 a_3)\cdot(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5) > 0$.

Первое условие: $2\tau_1(\ \tau_2 + \tau_1\ )^2 > 0$; второе условие: $2\tau_1(\ \tau_2 + \tau_1\ )^2 K_d - 2\tau_1\tau_2 K_p - [(2\tau_1\tau_2 + \tau_1^2)K_d - \tau_1^2\tau_2 K_p]^2 > 0$, из которого сразу находятся K_{d1} и K_{d2} при K_p=0:

$$[2\tau_1(\tau_1+\tau_2)^2]K_d - [(2\tau_1\tau_2+\tau_1{}^2)^2]K_d{}^2 > 0,$$

$$K_{d1}=0\ ,\ K_{d2}=\frac{2\tau_1(\tau_1+\tau_2)^2}{(2\tau_1\tau_2+\tau_1{}^2)^2}=\frac{2(\tau_1+\tau_2)^2}{\tau_1(2\tau_2+\tau_1)^2}.$$

Далее можно получить $K_{p\,\max}$.

При равенстве τ_1 и τ_2 $K_{d2}=\dfrac{8}{9\tau}$ (рис. 3). Полученный результат несложно подтвердить, принимая постоянную времени третьего звена в долях от первых двух. Проведенная оценка показывает, что уменьшение на порядок третьей инерции заметно приближает область устойчивости к системе четвертого порядка (в то же время - и ощутимо меньше). Полученный результат необходимо иметь в виду в том случае, если третье инерционное звено моделирует запаздывание контроллера.

Рассмотрение систем более высокого порядка связано, с одной стороны, с техническими трудностями, а с другой, маловероятно найти систему с большим количеством запаздывающих звеньев. Кроме того, рассмотренная общая тенденция уменьшения области устойчивости с ростом количества запаздывающих звеньев и плавного перехода к модели на единицу меньше с увеличением соотношения постоянных времени запаздывающих звеньев позволяет качественно оценить ожидаемый результат от учета дополнительного звена. Необходимо учитывать, что очень часто разработчики систем даже не оценивают величин постоянных времени звеньев, считая их достаточно малыми, и не учитывают их даже в программах при расчете качества регулирования.

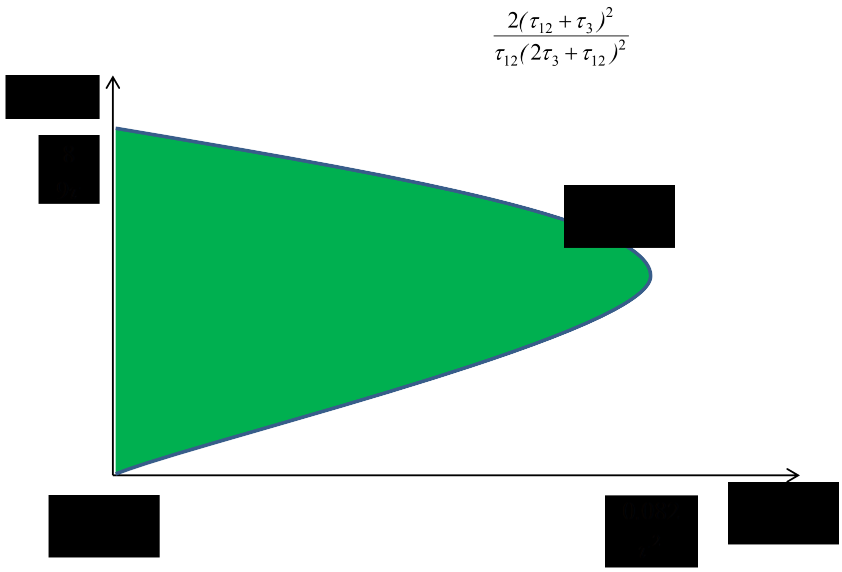

Рис. 3. Область устойчивости с учетом трех инерционных звеньев для случая, когда $\tau_1=\tau_2=\tau3=\tau$ и $\tau_1=\tau_2=\tau_{12}$, $\tau_3\neq\tau_{12}$.

Тем не менее, сделаем оценку изменения области устойчивости рассматриваемой системы в предположении $K_p=0$.

Используем критерий Рауса для оценки изменения области устойчивости при учете четвертого инерционного звена.

$$ma=-F\ \ ,\ \ F=\frac{K_d\dot{X}+K_pX}{(\tau p+1)^4}.$$

Характеристическое уравнение системы будет иметь вид

$$\tau^4p^6+4\tau^3p^5+6\tau^2p^4+4\tau p^3+p^2+K_dXp+K_pX=0.$$

Пятая строка таблицы требует вычислений условия положительности полученного выражения в предположении $K_p = 0$.

$$c_{15} = \frac{4 - \tau \cdot K_d}{4^5} - \frac{100\tau K_d}{16 + \tau K_d} > 0$$

$K_{d1} = \frac{0{,}000625}{\tau}$. Второй корень меньше нуля.

Напомним, что для пятого прядка $K_{d2} = \frac{8}{9\tau}$, а для четвертого $K_{d2} = \frac{2}{\tau}$.

Стремительное уменьшение области устойчивости (рис. 4) по мере увеличения учитываемых запаздываний в системе, видимо, следует объяснять изменением вида передаточной функции запаздывающих звеньев (приближения к передаточной функции чистого запаздывания).

Полученный результат следует считать крайне консервативной оценкой, поскольку рассматривался случай равенства инерций всех запаздывающих звеньев. Представляется не рациональным в рамках математических моделей, предназначенных для аналитических исследований, пытаться построить область устойчивости системы с учетом сочетаний реальных запаздываний в системе по разным причинам (в том числе и непостоянства некоторых из них). Все это – предмет исследования расчетов динамики системы по расчетным программам. В данной работе проиллюстрирована лишь необходимость анализа запаздывающих звеньев и принятия решения об их учете (или пренебрежении) в математической модели и, соответственно, в расчетной программе. Не исследован остался вопрос влияния звена чистого запаздывания на устойчивость системы, который особенно становится актуальным при переходе на цифровую технику.

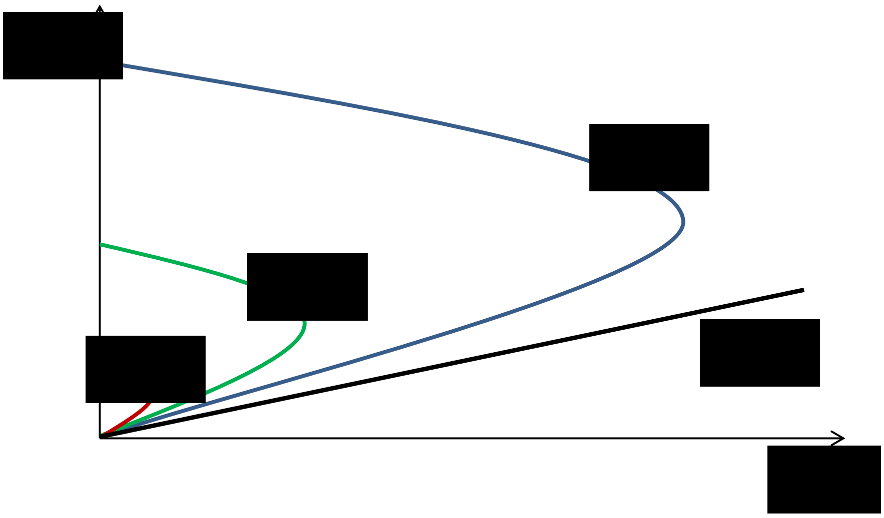

Рис. 4. Результаты исследования с учетом разного количества инерционных звеньев: 1, 2, 3 и 4 – соответственно.

Заключение.

1. Выполнен анализ области устойчивости системы пятого порядка в предположении равенства показателей инерции трех инерционных звеньев. Доказано, что характер области устойчивости в плоскости параметров системы управления сохраняется (остров, ограниченный осями координат и параболой). Однако размер области существенно уменьшается.

2. Учитывая, что третья инерция, вероятно, может быть существенно меньше первых двух, выполнен анализ влияния «малой» инерции на размер области

устойчивости. Получены алгебраические выражения, для определения максимальных значений коэффициентов системы управления при разных величинах инерционности.

3. Предложена методика построения границы устойчивости системы, рассматриваемого типа, которая состоит из нескольких элементов:

- характеристическое уравнение системы следует исследовать на устойчивость системы без введения безразмерного времени;

- критерий Гурвица, для системы пятого порядка, не позволяет его преобразовать таким образом, чтобы получить алгебраическое выражение одного коэффициента системы относительно другого. Тем не менее, критерий имеет квадратичные члены, что позволяет предположить параболический вид границы устойчивости;

- в плоскости параметров системы управления K_p и K_d первые две точки на границе устойчивости K_{d1} и $K_{d\max}$ легко находятся при $K_p = 0$. Задаваясь значениями K_d в полученном диапазоне, получаем одно положительное значение K_p. Повторяя эту процедуру с определенной дискретностью получим границу устойчивости системы.

Список литературы:

[1]. Митенков Ф.М. Комплекс расчетно-методических и экспериментальных исследований движения ротора на электромагнитном подвесе./ Ф.М. Митенков, Н.Г. Кодочигов и др. // Атомная энергия, 2005. – Т. 99. Вып. 1. С. 26-33.

[2]. Лебедева С. В. Исследование границы устойчивости линейной системы четвертого порядка, Вестник ВГАВТ, выпуск 46. //Н. Новгород: ФГБОУ ВО «ВГУВТ», 2016. С. 32-35.

SCOPING THE SUSTAINABILITY

Vostokov V.S., Lebedeva S.V.

Sustainability, research, consideration of inertia, control system.

Examines the impact of the additional number of inertial units to the region of stability of the motion control system of the body.