

УДК: 517.9

**В.Н. Белых**, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой ФГБОУ ВО «ВГУВТ» 603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

**Н.В. Барабаш**, аспирант кафедры математика ФГБОУ ВО «ВГУВТ» ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского" 603951, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

### АТТРАКТОР-ПРИЗРАК В СЛУЧАЙНО МИГАЮЩЕЙ ФАЗОВОЙ СИСТЕМЕ

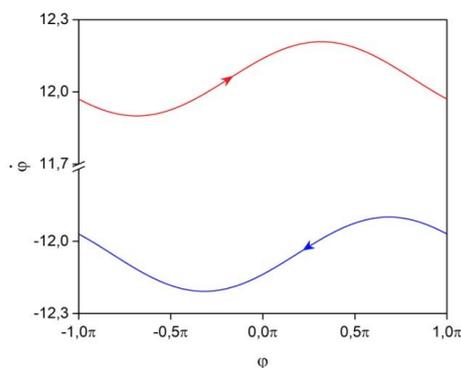
*Ключевые слова: аттрактор-призрак, мигающая система, случайные переключения, усреднение.*

*Рассматривается модифицированный нелинейных осциллятор, один из параметров которого случайно переключается между двумя значениями в равные промежутки времени. Показано, что при достаточно быстрых переключениях динамика мигающей системы близка к динамике усреднённой системы, полученной с помощью замены переключающегося параметра его средним по времени значением. Дается определение аттрактора-призрака.*

Рассматривается уравнение модифицированного нелинейного осциллятора

$$\ddot{\varphi} + (\lambda - a \cos \varphi)\dot{\varphi} + \sin \varphi = h(t), \quad (1)$$

где  $\varphi$  – фаза осциллятора,  $\lambda, a = \text{const}, a > \lambda > 0$  – параметры, а  $h(t)$  – случайно переключающийся параметр, принимающий на временном интервале  $t \in [t_i, t_i + \tau)$  значения  $b = \text{const}$  с вероятностью  $p$  и  $-b$  с вероятностью  $q = 1 - p$ . Это случайное независимое переключение параметра при малых временных интервалах  $\tau \ll 1$  было названо «миганием» (blinking) по аналогии с морганием глаза [1, 2, 3, 4].



*Рисунок 1. Глобально устойчивые вращательные циклы системы (1) при  $h(t) \equiv 1.2$  (отмечен красным) и при  $h(t) \equiv -1.2$  (отмечен синим).*

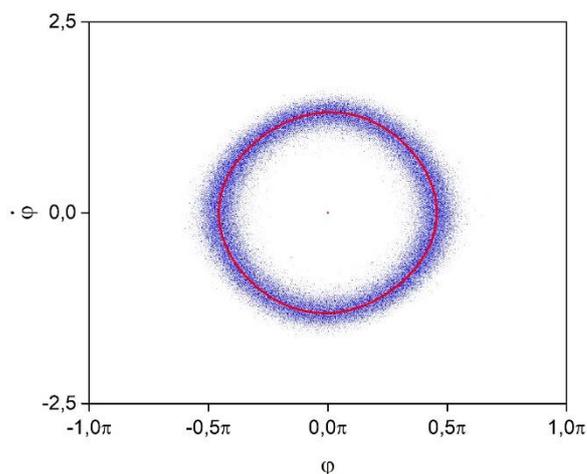
При  $h(t) \equiv \gamma = \text{const}$  для системы (1) известно разбиение пространства параметров  $D: \gamma, \lambda, a$ , области которого соответствуют различным разбиениям фазового пространства [5]. Значения  $\gamma = \pm b$ , которые принимает функция  $h(t)$ , были выбраны из областей, соответствующих существованию глобально устойчивых предельных вращательных циклов (Рис. 1).

Поскольку период переключения  $\tau = \mu \ll 1$  есть малая величина, систему (1) можно усреднить по быстрому времени  $t' = \frac{t}{\mu}$  и заменить случайную функцию  $h(t)$  её средним по времени значением  $\gamma = \langle h(t') \rangle = 0$ . Т.е. усреднённой системе

соответствует случай системы с  $\gamma = 0$ . Эта система имеет глобально устойчивый  $O$  – цикл, охватывающий состояние равновесия (замкнутая красная кривая на Рис. 2). Этот цикл отсутствует у обеих автономных систем, имеющих вращательные (в разные стороны) предельные циклы.

При больших интервалах переключения  $\tau < \tau_{порог}$  в мигающей системе (1) появляется глобально устойчивое притягивающее множество, лежащее в окрестности аттрактора усреднённой системы (отмечено синим на Рис. 2). Данный аттрактор, отсутствующий у систем, участвующих в мигании, но определяющий её динамику, является аттрактором-призраком [6]. Напомним, что аттрактором-призраком мигающей системы называется аттрактор (нестационарный) мигающей системы, отличающийся по своей структуре или типу от аттракторов систем, между которыми происходит мигание.

Аналитические результаты поддержаны грантом РФФИ 18-01-00556\18. Численные результаты поддержаны грантом РНФ 14-12-00811.



*Рисунок 2. Синим цветом изображено глобально устойчивое притягивающее множество системы (1) при случайном мигании с периодом  $\tau = 0.001$ . Усредненная по времени система (1) имеет глобально устойчивый предельный цикл (красная замкнутая кривая), являющийся аттрактором-призраком для системы с миганием. В начале координат усредненная система имеет неустойчивое состояние равновесия.*

### Список литературы:

- [1]. I. Belykh, V. Belykh, and M. Hasler. Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling. *Physica D*, V. 195/1-2, pp 188-206 (2004).
- [2]. M. Hasler, V. Belykh, and I. Belykh. Dynamics of stochastically blinking systems. Part II: Asymptotic properties. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 12, No. 2, pp. 1031–1084 (2013).
- [3]. M. Hasler, V. Belykh, and I. Belykh. Dynamics of stochastically blinking systems. Part I: Finite time properties. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, Vol. 12, No. 2, pp. 1007–1030 (2013).
- [4]. N. V. Barabash, V. N. Belykh. Synchronization Thresholds in an Ensemble of Kuramoto Phase Oscillators with Randomly Blinking Couplings. *Radiophysics and Quantum Electronics*. Vol. 60, No. 9, pp 761–768, February, 2018.
- [5]. Л. Н. Белюстина, В. Н. Белых. Качественное исследование динамической системы на цилиндре. *Дифференц. уравнения*, 1973, том 9, номер 3, 403–415.
- [6]. Belykh, I., Belykh, V., Jeter, R. et al. Multistable randomly switching oscillators: The odds of meeting a ghost. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, October 2013, Volume 222, Issue 10, pp 2497–2507.

## GHOST ATTRACTOR IN RANDOMLY BLINKING PHASE SYSTEM

V.N.Belykh, N.V. Barabash

*Key words: ghost attractor, blinking system, random switching, averaging.*

*A modified nonlinear oscillator is considered, one of the parameters of which randomly switches between two values in equal intervals of time. It is shown that, with sufficiently fast switching, the dynamics of the flashing system is close to the dynamics of the averaged system obtained by replacing the switching parameter with its time-average value. The definition of the attractor-ghost is given.*