ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ВНУТРЕННИХ ВОДНЫХ ПУТЕЙ В БАССЕЙНАХ ВЕЛИКИХ РЕК
*Труды конгресса «Великие реки» 2018*
*Выпуск 7, 2018 г.*
ISBN 978-5-901722-60-2

УДК 517.925/926

**В.Н. Белых**, профессор, д.ф.-м.н., зав. кафедрой, ФГБОУ ВО “ВГУВТ
**О.Н. Кащеева**, к.ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВО “ВГУВТ”
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

# ХАОТИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ В МНОГОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ТРЕМЯ СОСТОЯНИЯМИ РАВНОВЕСИЯ

*Ключевые слова: динамические системы, аттракторы, хаос*

*Получены достаточные условия существования хаотических аттракторов в многомерной динамической системе с тремя состояниями равновесия. Построено отображение последования Пуанкаре и изучены его свойства.*

Рассматривается $n$ -мерная динамическая система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\varphi(x) + y + d_1^T v, \\ \dot{y} &= -b\varphi(x) - \lambda y + d_2^T v, \\ \dot{v} &= c_1\varphi(x) + c_2 y + Bv, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x, y \in \mathbb{R}^1, v \in \mathbb{R}^{n-2}$; $a \in \mathbb{R}^1, b > 0, \lambda \geq 0$ – параметры; $c_1, c_2, d_1, d_2$ – $(n-2)$-векторы; $B$ – гурвицева $(n-2) \times (n-2)$-матрица.

Пусть $\varphi(x)$ – гладкая функция, которая ведет себя как многочлен третьей степени: имеет 2 критические точки $x = x_{1,2}^c$ и три нуля $x = x_i^0$ $(i = 1,2,3)$. Для определенности предположим, что $\varphi(x_1^c) > 0$, $\lim_{|x|\to\infty}|\varphi(x)| = \infty$. Эту динамическую систему можно рассматривать как многомерное обобщение известной системы L.O. Chua [1].

Система (1) имеет три состояния равновесия $O_1(x_2^0, 0, \dots, 0), P_1(x_1^0, 0, \dots, 0), P_2(x_3^0, 0, \dots, 0)$. Обозначим $d_0 = \max\left(\frac{\|d_1\|}{|a|}, \frac{\|d_2\|}{|b|}\right)$. Так как $B$ – гурвицева матрица, то линейная система $\dot{v} = Bv + \widetilde{\omega}(t)$ имеет притягивающую область $\|v\| < S\omega$. Здесь $\widetilde{\omega}(t)$ – произвольная ограниченная функция $\|\widetilde{\omega}(t)\| < \omega = const$, а положительная величина $S$ определяется спектром матрицы $B$.

С помощью метода двумерных систем сравнения ([2],[3],[4]) доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Если $d_0 S\left(\|c_1\| + \frac{2b}{\lambda}\|c_2\|\right) < 1$, то состояние равновесия $O_1$ является седло-фокусом с одномерным неустойчивым многообразием $W^u$ и устойчивым многообразием $W^s$ размерности $n-1$. Все траектории системы (1) покидают область $G_{sd}\backslash W^s (G_{sd}\backslash W^u$ ) при $t \to +\infty$ $(t \to -\infty$ соответственно).*

*Здесь $G_{sd} = I \times \mathbb{R}^{n-1}, I = \{x_1^c < x < x_2^c\}$, так что $O_1 \in I$ и $\varphi'(x) < 0$ для $x \in I$.*

Пусть $G_1$ – область гомеоморфная шару в $\mathbb{R}^n$, содержащая седло-фокус $O_1$, $g^{+(-)}$ – глобальные «трубчатые» окрестности неустойчивого многообразия $W^u$, примыкающие к $G_1$ с противоположных сторон устойчивого многообразия $W^s$.

Обозначим $d^{+(-)} = \partial G_1 \cap g^{+(-)}$, $l_1 = \partial G_1 \cap W^s$, $M^{+(-)} = d^{+(-)} \cap W^u$, $D_1 = \partial G_1 (d^+ \cap d^-)$. Устойчивое многообразие $W^s$ делит $D_1$ на две части $D_1^{+(-)}$ так, что $D_1 = D_1^+ \cup l_1 \cup D_1^-$.

**Утверждение.** *Если $G = G_1 \cup g^+ \cup g^-$ является притягивающей областью векторного поля $F$, определенного системой (1), и траектории поля в каждой трубке $g^{+(-)}$ транзитивны и порождают отображение $S^{+(-)}: \partial G_1 \to \partial G_1$, то векторное поле $F$*

1) *имеет аттрактор $A \in G$;*
2) *порождает отображение $f = S^+ T$, где*

$$\begin{aligned} &T: D_1^{+(-)} \to d^{+(-)},\ l_1 \to M^+ \cup M^-, \\ &S^{+(-)}: d^{+(-)} \to D_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Для трехмерной системы (1) с седло-фокусом геометрическая интерпретация получена в работе [5]. Отображение (3) для нее в локальных координатах на цилиндре $G_1$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi} = \psi - \tfrac{\pi}{2} + \left(\tfrac{\pi}{2} + a|x|^\nu \cos(\varphi - \omega \ln|x|)\right) \operatorname{sign} x, \\ &\bar{x} = \mu \operatorname{sign} x - a|x|^\nu \sin(\varphi - \omega \ln|x|), \qquad x \in D_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где $D_1 = \{|x| < h, \varphi \in S^1\}$, $\mu, \nu, \psi, \omega$ – положительные параметры и $\nu < 1$.

**Теорема 2.** *Если параметры удовлетворяют условиям*

$$\nu < 1, \quad a^{1/(1-\nu)} < h, \quad 0 \le \mu \le h - ah^\nu,$$

*то отображение (3) имеет хаотический аттрактор $A_1$, который является квазиаттрактором при 1/2 $< \nu < 1$ (имеет счетное множество седловых периодических орбит, а также некоторое множество устойчивых предельных циклов с большими периодами) и странным аттрактором без устойчивых траекторий при* $0 < \nu < {}^1\!/_2$.

В работе изучено обобщение данной модели для случая $n > 3$.

Пусть $O_1$ является седло-фокусом и линейная система в области $G_1$ имеет вид

$$\dot{x} = \gamma x,\ \dot{u} = -\sigma u - \omega_0 v, \qquad \dot{v} = \omega_0 u - \sigma v, \qquad \dot{y} = Ly, \tag{4}$$

где $x, u, v \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^p, p = n - 3$; параметры удовлетворяют условиям $\gamma > 2\sigma > 0$, $\omega_0 > 0$ и $L$ – гурвицева матрица с собственными значениями $\alpha_i (i = \overline{1,p})$ такими, что $\operatorname{Re}\alpha_i \le \operatorname{Re}\alpha_1 < -\sigma$; $G_1 = \{|x| \le h,\ u^2 + v^2 \le r^2\}$. Используя полярные координаты $u = \rho \cos\varphi$, $v = \rho \sin\varphi$ и время $\tau = -\gamma^{-1} \ln|x(0)/h|$, получим следующие формулы для отображения $T: (\varphi(0), x(0), y(0)) \to (u(\tau), v(\tau), y(\tau))$:

$$\begin{aligned} u(\tau) &= a|x|^\nu \cos(\varphi - \omega \ln|x|), \\ v(\tau) &= a|x|^\nu \sin(\varphi - \omega \ln|x|), \\ y(\tau) &= |x|^\alpha R(x) y, \end{aligned}$$

где $x(0) = x, y(0) = y, \varphi(0) + \psi = \varphi,\ \psi = \omega \ln h, \nu = {}^{\sigma}\!/_{\gamma},\ \omega = {}^{\omega_0}\!/_{\gamma}, a = rh^{-\nu}$, $\alpha = |\operatorname{Re}\alpha_1|/\gamma$. Элементы $R_{ij}$ $(i,j = \overline{1,p})$ матрицы $R(x)$, порожденной решениями (4), ограничены $|R_{ij}| < K$ при $|x| \le h$, поэтому $\|R(x)\| < Kp^2$.

Отображения $S^{+(-)}: (x, \varphi, y) \to (\bar{x}, \bar{\varphi}, \bar{y})$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \psi - \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + u(\tau)\right) \operatorname{sign} x, \\ \bar{x} &= \mu \operatorname{sign} x - v(\tau), \\ \bar{y} &= \Delta^T \operatorname{sign} x + y(\tau), \end{aligned}$$

где $\Delta = (\delta, \dots, \delta)$, $\delta > 0$, $\mu > 0$, $x > 0$ для $S^+$ и $x < 0$ для $S^-$.

Следовательно, результирующее отображение $f = S^{+(-)}T\colon D_1 \to D_1$ может быть записано как отображение (3), к формулам которого добавлено уравнение

$$\bar{y} = \Delta^T \operatorname{sign} x + |x|^{\alpha} R(x) y. \qquad (5)$$

Обозначим $Q = Kp^2 h^{\alpha}$.

**Лемма.** *Пусть* $Q < 1/2$. *Тогда для любой орбиты* $x(k)$ $(k = 0,1,\ldots)$ *разностного уравнения (3), такой что* $|x(k)| < h$, *отображение (5) имеет притягивающую область, состоящую из двух изолированных компонент* $\Omega^+ \subset \{y_i > 0,\ i = \overline{1,p}\}$ *и* $\Omega^- \subset \{y_i < 0,\ i = \overline{1,p}\}$ *и траектории (5) переходят из* $\Omega^{+(-)}$ *в* $\Omega^{-(+)}$, *когда* $x(k)$ *меняет знак.*

Из леммы и теоремы 2 следует справедливость следующей теоремы.

**Теорема 3.** *Если параметры удовлетворяют условиям*

$$0 < \nu < \frac{1}{2}, \qquad Q < \frac{1}{2}, \qquad \mu < \mu^*, \qquad a < a^*,$$

*то* $(n-1)$*-мерное отображение (3),(5) имеет странный аттрактор* $A_2$ *,без устойчивых траекторий.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00556 А).

**Список литературы:**

[1] ,L. O. Chua, “ Chua’s Circuit: An Overview Ten Years Later”, *Journal of Circuits, Systems and Computers*, **4** (1994): 117–159.

[2] Л.Н. Белюстина, В.Н. Белых, “Качественное исследование динамической системы на цилиндре”, *Дифференц. уравнения*, **9**:3 (1973), с. 403–415.

[3] В.Н. Белых, “Гомоклинические и гетероклинические траектории семейства многомерных динамических систем”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 20–31; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **216** (1997), 14–25

[4] V.N. Belykh, “Homoclinic and heteroclinic linkages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps”, *Advances in the Mathematical Sciences, American Math. Soc. Translations*, Series 2, **200**, pp. 51–62.

[5] V.N. Belykh and L.O. Chua, “New type of strange attractor from a geometric model of Chua’s circuit”, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg*. **2**(1992) no. 3, 697–704.

## CHAOTIC ATTRACTORS IN MULTYDIMENSIONAL DYNAMICAL SISTEM WITH THREE EQUILIBRIUM POINTS

V.N. Belykh, O.N. Kashcheeva

*Key words: dynamical systems, attractors, chaos*

*The sufficient conditions for the existence of chaotic attractors in multidimensional dynamical system with three equilibrium points are obtained. Poincare return map is constructed and studied.*