ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ВНУТРЕННИХ ВОДНЫХ ПУТЕЙ В БАССЕЙНАХ ВЕЛИКИХ РЕК
Труды конгресса «Великие реки» 2018
Выпуск 7, 2018 г.
ISBN 978-5-901722-60-2

УДК 533.951, 539.

Т.М. Заборонкова, д.ф.-м. н., профессор, ФГБОУ ВО «НГТУ» им. Р.Е. Алексеева
603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
Е.Н. Мясников, д.ф.-м. н., зав. кафедрой физики ФГБОУ ВО «ВГУВТ»,
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

ДРЕЙФОВЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИРЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ ВЕРХНЕЙ ИОНОСФЕРЫ

Ключевые слова: магнитоактивная плазма, магнитная гидродинамика (МГД), дрейфовое приближение, МГД-волны, плазма верхней ионосферы.

Получено решение уравнений двухжидкостной магнитной гидродинамики (МГД), в котором показано, что в низкотемпературной магнитоактивной плазме, близкой к идеальной, возможна генерация дрейфовых магнитогидродинамических (МГД) волн – возмущений плотности плазмы, антисимметричных по отношению к внешнему магнитному полю, имеющих частоту дифференциального вращения порядка дрейфовой. В условиях верхней ионосферы дрейфовые МГД-волны могут приводить к развитию гиротропной турбулентности плазмы.

1. Основные уравнения

Система МГД уравнений, описывающих двухкомпонентную магнитоактивную плазму, включает уравнения непрерывности и уравнения движения заряженных частиц [1]

$$\partial n_\alpha/\partial t + div\, n_\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$m_\alpha\, \partial \boldsymbol{v_\alpha}/\partial t = \pm e\boldsymbol{E} \pm e[\boldsymbol{v_\alpha} \times \boldsymbol{B}] - \nabla p_\alpha/n_\alpha - v_{ei}\, m_e\, \boldsymbol{j}/(e\, n_\alpha)\,, \qquad (2)$$

уравнение для потенциального электрического поля:

$$div\, \boldsymbol{E} = -\Delta\varphi = 4\pi\,(n_i - n_e), \qquad (3)$$

и уравнения для низкочастотных электромагнитных полей:

$$\partial \boldsymbol{B}/\partial t = -c\, rot\boldsymbol{E}, \qquad (4)$$

$$rot\, \boldsymbol{B} = 4\pi\, \boldsymbol{j}/c. \qquad (5)$$

При выполнении условия $|\boldsymbol{v}_\alpha|/\mathrm{c} \ll 1$ индукционное электрическое поле $\boldsymbol{E}$ в лабораторной (эйлеровой) системе отсчета связано с полем $\boldsymbol{E}'$ в локальной (лагранжевой) системе отсчета, движущейся вместе с проводящей жидкостью, преобразованием Лоренца

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]/c. \qquad (6)$$

Здесь использованы следующие обозначения: n_α – концентрации заряженных частиц, $\boldsymbol{v_\alpha}$ – их скорости, $\boldsymbol{E}$ – напряженность электрического поля, $\boldsymbol{B}$ – индукция магнитного поля, $\boldsymbol{j} = \sum e n_\alpha \boldsymbol{v_\alpha}$ – плотность тока, $p_\alpha = n_\alpha T_\alpha$ – парциальные газокинетические давления, T_α – температуры, m_α – массы, v_{ei} – эффективная частота соударение электронов (α=e) и ионов (α=i), e – модуль заряда электрона, c – скорость света. При выполнении неравенства $|n_e - n_i|/n = r_D^2/l^2 \ll 1$, где $r_D = \sqrt{T_e/4\pi n e^2}$ –

радиус Дебая, l – масштаб неоднородностей плазмы, выполняется условие квазинейтральности, при котором концентрации электронов и ионов совпадают ($n_e = n_i$). Плазма верхней ионосферы является низкотемпературной $(8\pi n\,(T_e + T_i)/B_0^2 \ll 1)$ сильно замагниченной $(\nu_{ei}/\omega_{B\alpha} \ll 1)$ проводящей средой. Здесь $\omega_{B\alpha} = eB_0/m_\alpha c,$ – гирочастоты заряженных частиц, B_0 – индукция внешнего магнитного поля.

2. Условия равновесия идеальной магнитоактивной плазмы

Потенциальное электрическое поле $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ в изотропной и изотермической плазме отвечает условию равновесие Больцмана для более подвижной – электронной компоненты плазмы определяется условию $T_e\nabla n = -en\boldsymbol{E}$, приходим к выражению:

$$\nabla\varphi = \frac{T_e}{e}\frac{\nabla n}{n}. \tag{7}$$

Поле (7) обеспечивает квазинейтральность плазмы и ее низкочастотных возмущений.

В магнитоактивной идеальной плазме в одножидкостном приближении при отсутствии возмущений концентрации генерируется индукционное электрическое поле $\boldsymbol{E}_\perp$, которое поляризовано строго ортогонально внешнему магнитному полю $\boldsymbol{B}_0$ и связано со скоростью дрейфа плазмы соотношениями:

$$\boldsymbol{v}_\top = \frac{c[\boldsymbol{E}_\perp \times \boldsymbol{B}_0]}{B_0^2}, \qquad \boldsymbol{E}_\perp = -[\boldsymbol{v}_\top \times \boldsymbol{B}_0]/c. \tag{8}$$

Отметим, что условия (8) отвечают стационарному $\boldsymbol{E}_\perp \times \boldsymbol{B}_0$-дрейфу плазмы в регулярном магнитном поле. Согласно преобразованиям Лоренца (6), справедливым при $v_\top \ll c$, электрическое поле в локальной системе отсчета обращается в нуль $(\boldsymbol{E'}_\perp = 0)$, и электронная и ионная компоненты плазмы движутся в направлении, ортогональном плоскости $(\boldsymbol{E}_\perp \cdot \boldsymbol{B}_0)$, с одинаковыми скоростями $\boldsymbol{v}_{e\top} = \boldsymbol{v}_{i\top} = \boldsymbol{v}_\top$, и ток в этом направлении отсутствует $(\boldsymbol{j}_\top = 0)$. В отличие от (8) результирующееэлектрическое поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E'}_\perp - \nabla\varphi$ имеет как потенциальную, так и вихревую компоненты.

В двухжидкостном приближении в магнитоактивной плазме возникает дополнительное условие частичного равновесия, согласно которому плотность силы Ампера уравновешивает градиент газокинетического давления в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{B}_0$, при этом в плазме протекает квазистатический диамагнитный ток, плотность которого равна:

$$\boldsymbol{j}_\top = en(\boldsymbol{v}_{i\top} - \boldsymbol{v}_{e\top}) = \frac{c(T_e + T_i)}{B_0^2}[\boldsymbol{B}_0 \times \nabla n]. \tag{9}$$

Здесь индексом " $\top$ " мы обозначаем направление движения, ортогональное в плоскости $(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla n)$. Для нахождения индукционного электрического поля воспользуемся стационарным уравнением движения для электронной компоненты, которое можно рассматривать в качестве обобщенного закона Ома (см. [1]):

$$T_e\nabla n = -en(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}_{e\top} \times \boldsymbol{B}_0]/c)]. \tag{10}$$

Подставим поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E'}_\perp - \nabla\varphi$ в (10), в котором потенциальная компонента определяется условием равновесия (7), приходим к выражению для индукционного электрического поля в лагранжевой системе отсчета, где ионная компонента плазмы неподвижна

$$\boldsymbol{E'}_\perp = -\frac{[\boldsymbol{v}_{e\top} \times \boldsymbol{B}_0]}{c} = \frac{(T_e + T_i)}{e}\frac{\nabla_\perp n}{n}. \tag{11}$$

Вместе с тем согласно (6) поле в эйлеровой (лабораторной) системе отсчета определяется выражением $\boldsymbol{E}_\perp = \boldsymbol{E'} - [\boldsymbol{v}_\top \times \boldsymbol{B}_0]/c$. Здесь возможны два решения:

Первое из них: согласно условию равновесия (7) электронная компонента в лабораторной системе отсчета неподвижна – *вморожена* в силовые линии поля $\boldsymbol{B}_0$ (см. [1]), тогда диамагнитный ток в лабораторной системе отсчета, где электронная компонента покоится $\boldsymbol{v}_{e\top} = 0$, определяет только ионная компонента $\boldsymbol{j}_\top = en\boldsymbol{v}_{i\top}$, и электрическое поле в этой системе отсчета отсутствует ($\boldsymbol{E}_{\perp} = 0$). Заметим, что в локальной системе отсчета ($\boldsymbol{v}_{i\top} = 0$), диамагнитный ток всегда определяется движением только электронов.

Второе решение отвечает условию, при котором электронная компонента ускоряется внешним магнитным полем и , как более *замагниченная* ($\omega_{Be} \gg \omega_{Bi}$) в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{B}_0$, приводит к ускорению ионной компоненты до скорости порядка дрейфовой. В этом случае скорость совместного движения электронов и ионов лабораторной системе отсчета, и электрическое поле, как и в одножидкостном приближении, определяются выражениями (8), и диамагнитный ток в лабораторной системе отсчета определяет движение электронов с дрейфовой скоростью $\boldsymbol{v}_{e\top} = \boldsymbol{v}_{i\top} - \boldsymbol{j}_{\top}/en$. Движение электронов происходит в направлении, ортогональном $\nabla_{\perp} n$, и в первом приближении не вызывает возмущения концентрации плазмы.

Уравнение (4) в двухжидкостном приближении принимает вид:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_{\top}}{\partial} t - c\, rot[\boldsymbol{v}_{\top} \times \boldsymbol{B}_0] = c\, rot\, \boldsymbol{E}'_{\perp} = c\, rot\, \frac{(T_e + T_i)}{e} \frac{\nabla_{\perp} n}{n}. \quad (12)$$

Здесь $\boldsymbol{B}_{\top}$ – магнитное поле, создаваемое диамагнитным током (9), его величина составляет $B_{\top} \le -\beta B_0/2$, поэтому при $\beta \ll 1$ инерционным слагаемым в (12) следует пренебречь. Подставляя в (12) поле (11), приходим к дополнительному условию равновесия, которому должна удовлетворять идеальная магнитоактивная плазма.

3. МГД волны в идеальной магнитоактивной плазме

Рассмотрим решения системы МГД уравнений для возмущений электромагнитных (ЭМ) и гидродинамических (ГД) полей вида плоских волн $\propto \exp\{-\omega t + i\boldsymbol{kr}\}$. В одножидкостном приближении в идеальной плазме присутствие индукционного электрического поля приводит к дрейфу плазмы в направлении, ортогональном внешнему магнитному полю и выполнению условия *вмороженности* плазмы в силовые линии магнитного поля. Возмущения дрейфовой скорости плазмы $\boldsymbol{v}_{\top}$ и магнитного поля $\boldsymbol{B}_{\top}$ подчиняются системе уравнений:

$$\omega\, \boldsymbol{B}_{\top} + \big[\boldsymbol{k} \times [\, \boldsymbol{v}_{\top} \times \boldsymbol{B}_0]\big] = 0, \qquad 4\pi m_i n_0\, \omega\, \boldsymbol{v}_{\top} + \big[\boldsymbol{k} \times [\, \boldsymbol{B}_{\top} \times \boldsymbol{B}_0]\big] = 0, \quad (13)$$

которая имеет решение, отвечающее волне Альфвена [2]. Данная волна распространяется в однородной плазме с концентрацией n_0 , она имеет фазовую и групповую скорости

$$v_{A\,ph} = \omega / k = c \sin\vartheta / \mathrm{n}_A, \qquad \boldsymbol{v}_{A\,gr} = \mathbf{e}_z\, c/\mathrm{n}_A\,,$$

где $\mathrm{n}_A = c\sqrt{4\pi m_i n_0}\,/B_0$ – показатель преломления альфвеновской волны. Введем право винтовую систему координат (x, y, z) и будем считать, что регулярное магнитное поле $B_0\mathbf{e}_z$ направлено вдоль оси z, $\mathbf{e}_z$ – орт данной оси, $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ – орты осей x и y соответственно. Здесь ϑ – угол между направлением волнового вектора $\boldsymbol{k}$ и нормалью к магнитному полю $\boldsymbol{B}_0$. Отметим, что в данной волне отсутствуют возмущения электронной концентрации.

Рассмотрим волновые решения линеаризованной относительно возмущений концентрации $\delta n = (n - n_0)/n_0$ системы уравнений (1 − 6) в двухжидкостном приближении. Представим возмущения квазистатических ЭМ и ГД полей в виде произведения соответствующего векторного оператора на относительное возмущение электронной концентрации $\delta n_{\boldsymbol{k}}$ – скалярную волновую функцию

$$\{\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\perp},\ \boldsymbol{E}'_{\boldsymbol{k}\perp}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}\theta}\,,\ \boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k}\top}\,,\ \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}\top}\,,\ \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}\theta}\} = \{\boldsymbol{E}_{\perp},\ \boldsymbol{E}'_{\perp}\,, \boldsymbol{B}_{\theta}\,,\ \boldsymbol{j}_{\top}\,,\ \boldsymbol{v}_{\top}\,,\ \boldsymbol{\Omega}_{\theta}\}\, \delta n_{\boldsymbol{k}}.$$

Здесь дополнительно определены поля плотности диамагнитного тока $\boldsymbol{j}_{\top}$, и вихря дрейфовой скорости $\boldsymbol{\Omega}_{\theta} = i[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_{\top}]$. Между операторами индукционных электрических полей и регулярным магнитным полем имеют место следующие поляризационные соотношения: $\boldsymbol{E}_{\perp}, \boldsymbol{E}'_{\perp} \perp \boldsymbol{B}_0$. Здесь можно выделить две взаимно ортогональные тройки – магнитную $\boldsymbol{B}_{\theta} \perp \boldsymbol{j}_{\top} \perp \boldsymbol{k}$ и гидродинамическую $\boldsymbol{\Omega}_{\theta} \perp \boldsymbol{v}_{\top} \perp \boldsymbol{k}$, повернутые в плоскости

$(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_0)$ относительно вектора $\boldsymbol{k}$ на угол $\vartheta = k_z/k_\perp \ll 1$. Дополнительное условие равновесия плазмы в двухжидкостном приближении приобретает вид:

$$[\boldsymbol{\Omega}_\theta \times \boldsymbol{B}_0] = - [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k}_\perp] c(T_e + T_i)/e \quad . \tag{14}$$

Векторное уравнение (14) является действительным и определяет проекции вектора дрейфовой частоты на оси x и y . Ее проекция на ось z согласно условию $(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\theta) = 0$ равна

$$\Omega_z = - k_\perp^2 \ \mathrm{c}(T_e + T_i)/(e\, B_0) \tag{15}$$

и является отрицательной. Это означает, что значение $k_\perp$, определенное из (15), является мнимым, и волновое решение отсутствует. Отметим, что полученное решение имеет линейную поляризацию, т.к. ЭМ и ГД поля не изменяют своего направления в пространстве.

Рассмотрим случай, отвечающий второму возможному решению, при котором электронная компонента ускоряет ионную и в лабораторной системе отсчета возникает совместное движение электронной и ионной компонент со скоростью порядка дрейфовой, значение которой удовлетворяет уравнениям (8). Предположим, что в лабораторной системе отсчета волновой вектор $\boldsymbol{k}$ и соответствующие ЭМ и ГД поля поворачиваются в плоскости $(\mathbf{e}_{\boldsymbol{x}} \cdot \mathbf{e}_{\boldsymbol{y}})$, ортогональной направлению поля $\boldsymbol{B}_0$, на угол $\delta\psi_{\boldsymbol{k}} \ll 1$. Вместе с поворотом вектора $\boldsymbol{k}$ в локальной системе отсчета возникает поворот регулярного магнитного поля на величину: $dB_{0\boldsymbol{k}\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}_0 \sin\vartheta\ \delta\psi_{\boldsymbol{k}}$. Далее, подставляя индукционное поле $\boldsymbol{E'}_{\boldsymbol{k}\perp}$ из (11) в уравнение электромагнитной индукции (4), приходим к выражению для угла поворота вектора $\boldsymbol{k}$ в плоскости, ортогональной $\boldsymbol{B}_0$,

$$d\psi_{\boldsymbol{k}}/dt = - \mathrm{c}\, k_x^2\ (T_e + T_i)/(e\, B_0)\ \ n_{\boldsymbol{k}}. \tag{16}$$

Положив в (16), что $\delta\psi_{\boldsymbol{k}} = \delta n_{\boldsymbol{k}}$ и $\Omega_{\boldsymbol{k}z} = d\psi_{\boldsymbol{k}}/dt$, усредняя по времени компоненту волнового вектора $\langle k_x^2 \rangle_{\mathrm{t}} = k_\perp^2/2$,

приходим к выражению для дрейфовой частоты:

$$\Omega_{Dz} = k_\perp^2\ c(T_e + T_i)/(2e\, B_0)\, . \tag{17}$$

отличие от (15) возмущение данного типа имеет положительное значение дрейфовой частоты (17), поэтому данное уравнение можно рассматривать в качестве дисперсионного уравнения дрейфовой МГД-волны. Оно аналогично дисперсионному уравнению волны де-Бройля и приводит к параболическому уравнению для волновой функции $\delta n_{\boldsymbol{r}}$, которая в $\boldsymbol{r}$-пространстве является случайным полем, определяющим функцию распределение относительных флуктуаций электронной концентрации. В -пространстве однородной плазме функция $\delta n_{\boldsymbol{k}}$, имеет следующие условия нормировки:

$$\left|\delta n_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\right|^2 = \delta n_{\boldsymbol{k}} \cdot \delta n_{\boldsymbol{k}'}^* \cdot \delta\,(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') = \int \left|\delta n_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\right|^2 d\boldsymbol{k}' = \int |\delta n_{\boldsymbol{k}}|^2\, d\boldsymbol{k} =_, |\delta n|^2$$

где $\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$ – дельта функция, $|\delta n_{\boldsymbol{k}}|^2$ – спектральная плотность мощности флуктуаций электронной концентрации, $|\delta n|^2$ – среднеквадратичная флуктуация электронной концентрации. Отметим, что дрейфовая МГД-волна в отличие от (15) имеет круговую поляризацию. Последнее позволяет предположить, что переход от неволнового к волновому решениям происходит в виде *фазового перехода* второго рода, при котором уменьшается внутренняя кинетическая энергия возмущений плотности плазмы и изменяется симметрия возмущений, переходя от симметричной по отношению к внешнему магнитному полю $\boldsymbol{B}_0$ к антисимметричной.

Рассмотрим вопрос о преимущественном направлении вращения возмущений плотности плазмы. Магнитоактивная плазма является гиротропной средой, обладающей отличным от нуля моментом импульса $l_i = T_i/\omega_{Bi} \gg T_e/\omega_{Be}$, направление которого совпадает с направлением с направлением гировращения иона в магнитном поле. Если предположить, что в магнитоактивной плазме может развиваться гиротропная - вращательно неинвариантная турбулентность, в которой преимущественным направлением вихри скорости определенного знака, то в приближении двухжидкостной МГД такими преимуществами могу обладать только возмущения плотности плазмы возмущения плотности плазмы возмущения плотности плазмы $\delta n < 0$ в которых направление вращения совпадает с гировращением ионов в магнитном поле. Поскольку магнитоактивная плазма является диамагнитной средой, то в возмущениях данного типа результирующее магнитное поле будет усиливаться. Поскольку решение (17) в отличие от (15) имеет круговую поляризацию, то можно предположить, что переход от неволнового к волновому решениям происходит в виде *фазового перехода* второго рода, при котором изменяется симметрия возмущений плотности плазмы от симметричной по отношению к полю $\boldsymbol{B}_0$ к антисимметричной. При этом частота дрейфового вращения возмущений плотности плазмы уменьшается в два раза, и внутренняя кинетическая энергия системы также уменьшается. Данный переход, возможно, связан с возникновением МГД неустойчивостей, в частности, при воздействии на плазму верхней ионосферы – неустойчивости дрейфовых МГД-волн [3,4].

Список литературы:

[1]. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. - М. Наука 1980, 303 с.
[2]. Alfven H. On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. Arkiv. F.Mat. Astron. Mat. Astron. Fysic.1942.29 B. N.2, (7 pp.)
[3]. Мясников Е.Н. Международная конференция МСС-14 Трансформация волн,когерентные структуры и турбулентность, 24-27 ноября 2014. Сборник трудов С. 328 − 333.
[4]. Мясников Е.Н. Неустойчивость дрейфовых МГД-волн в верхней ионосфере Изв. высших уч. зав. Радиофизика. 1999. Т. 42. № 7. С. 691-699.

DRIFR MAGNETOHYDRODINAMIC WAVES IN UPPER IONOSPHERE

T.M. Zaboronkova and E.N. Myasnikov

Key words: magnetized plasma, magnetic hydrodynamics (MHD), drift approximation, MHD-waves, plasma of the upper ionosphere.

The solution of the equations of two-fluid magnetic hydrodynamics (MHD) is obtained, in which it is shown that in a low temperature magnetized plasma close to the ideal one it is possible to generate drift magnetohydrodynamics (MHD) waves-perturbations of plasma density, anti-symmetric with respect to the external magnetic field, having a frequency of differential rotation of the order of drift. Under the conditions of the upper ionosphere, drift MHD waves can lead to the development of helicity plasma turbulence.