



УДК 517.9

**Белых Владимир Николаевич**, профессор, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», главный научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского.

**Барабаш Никита Валентинович**, аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», младший научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волжский государственный университет водного транспорта» (ФГБОУ ВО «ВГУВТ»)

603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)

603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

## ДИКИЙ АТТРАКТОР В МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ЧЕРЕЗ ПРАВЫЕ ЧАСТИ ОСЦИЛЛЯТОРА И РОТАТОРА

*Ключевые слова:* дикий аттрактор, связанные осцилляторы, гомоклиническая орбита, хаотическая динамика, джозефсоновский контакт.

*Аннотация.* Рассматривается динамика четырёхмерной системы связанных ротатора и осциллятора, моделирующей динамическое поведение сверхпроводящего джозефсоновского контакта, взаимодействующего с линейным осциллятором. Строго доказывается выполнение необходимых условий существования дикого аттрактора, а именно, диссипативность системы при расширении объёма ведущего многообразия и существование гомоклинической бифуркации седло-фокуса.

Рассматривается динамика четырёхмерной системы связанных ротатора и осциллятора

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} + \lambda\dot{\varphi} + \sin \varphi - \gamma &= \mu(x + a\dot{x}), \\ \ddot{x} + h\dot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon(\gamma - \sin \varphi - b\dot{\varphi}),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\varphi \in \mathbb{S}^1$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$  – динамические переменные, а  $\lambda, \gamma, \mu, a, h, \omega, \varepsilon$  и  $b$  – положительные параметры. Система (1) моделирует динамическое поведение сверхпроводящего джозефсоновского контакта, взаимодействующего с резонатором [1-5]. Система (1) подобно маятниковому уравнению имеет два состояния равновесия  $e_1(\varphi = \arcsin \gamma, \dot{\varphi} = 0, x = 0, \dot{x} = 0)$  и  $e_2(\varphi = \pi - \arcsin \gamma, \dot{\varphi} = 0, x = 0, \dot{x} = 0)$ .

В настоящем докладе строго доказываются четыре утверждения о системе (1):

а) существует область параметров  $G_1$ , для которой в фазовом пространстве системы существует притягивающая инвариантная область  $D$ , содержащая  $e_1$  и  $e_2$ ;

б) существует область параметров  $G_2$ , для которой состояние равновесия  $e_2$  является седло-фокусом с одномерным неустойчивым многообразием  $W^u$  и трёхмерным устойчивым многообразием  $W^s$ . Собственные значения  $p^u$  и  $p_i^s, i = 1, 2, 3$  подпространств  $E^u$  и  $E^s$ , касательных в точке  $e_2$  к  $W^u$  и  $W^s$  соответственно, удовлетворяют условиям:

$$p_3^s < 0 < p^u - \text{действительные, } p_1^s \text{ и } p_2^s - \text{комплексно-сопряжённые и} \\ p^u + 2\text{Re } p_1^s + p_3^s < 0, p^u + 2\text{Re } p_1^s > 0;$$

в) в пространстве параметров существует множество  $G_3$ , соответствующее существованию гомоклинической орбиты седло-фокуса  $e_2$ ;

$$г) G_1 \cap G_2 \cap G_3 \neq \emptyset.$$

Данные утверждения являются необходимыми условиями рождения в системе (1) странного аттрактора – притягивающего множества целых неустойчивых траекторий, а также *дикого* аттрактора, траектории которого имеют неустойчивые многообразия разной размерности. Здесь мы ограничимся рассуждениями, необходимыми для доказательства утверждения (в).

Рассмотрим существование гомоклинической петли седло-фокуса [6]. Введем кольцо  $D_\varphi = \{\varphi, \dot{\varphi} = u \mid \varphi \in \mathbb{S}^1, |u| < u^0\}$ , а также границу  $K = \sup_{(\varphi, u) \in D_\varphi} |\gamma - \sin \varphi - bu| = \gamma + 1 + bu$  и функцию

$$G = \begin{cases} \varepsilon(\gamma - \sin \varphi - bu), & (\varphi, u) \in D_\varphi \\ \varepsilon C = \text{const}, & \text{в др. случае,} \end{cases} \quad (2)$$

где  $C \in (-K, K)$  – продолжение функции  $\gamma - \sin \varphi - bu$  по константе за границы области  $D_\varphi$ . Очевидно, что  $|G| \leq \varepsilon K$ . Вместо второго уравнения в (1) рассмотрим следующее уравнение за границами области  $D_\varphi$

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \omega^2 x = G(\varphi, u). \quad (3)$$

Для этого уравнения введём двумерную систему сравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \varepsilon K \text{sign } y - \omega^2 x - hy, \end{aligned} \quad (2)$$

для которой справедливо следующее утверждение (см. Рис. 1):

**Лемма.** 1) При  $h < 2\omega$  система (2) имеет глобально устойчивый предельный цикл  $l_c$ , лежащий в области  $\{x, y \mid |x| \leq x^0, |y| \leq y^0\}$ , где  $x^0 = \coth \frac{\alpha\pi}{2\beta} x^*$ ,  $y^0 =$

$$\omega \exp\left(-\frac{\alpha \arctan \frac{\beta}{\alpha}}{\beta}\right) (x^0 - x^*), \alpha = \frac{h}{2}, x^* = \frac{\varepsilon K}{\omega^2}, \beta = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

2) При  $h > 2\omega$  в системе (2) существует замкнутый контур  $l_e$ , образованный траекториями узлов  $\pm x^*$  с начальными условиями  $\mp x^*$ . Этот контур лежит в области  $\{x, y \mid |x| \leq x^*, |y| \leq y_e^0\}$ , где  $y_e^0 = 2\omega \exp\left(-\frac{\alpha \text{atanh} \frac{\beta'}{\alpha}}{\beta'}\right) x^*, \beta' = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \omega^2}$ .

3) Область  $D_x$ , ограниченная циклом  $l_c$  или контуром  $l_e$ , является инвариантной притягивающей областью для траекторий  $(x(t), \dot{x}(t))$  системы (2).

*Доказательство.* Приведено в докладе.

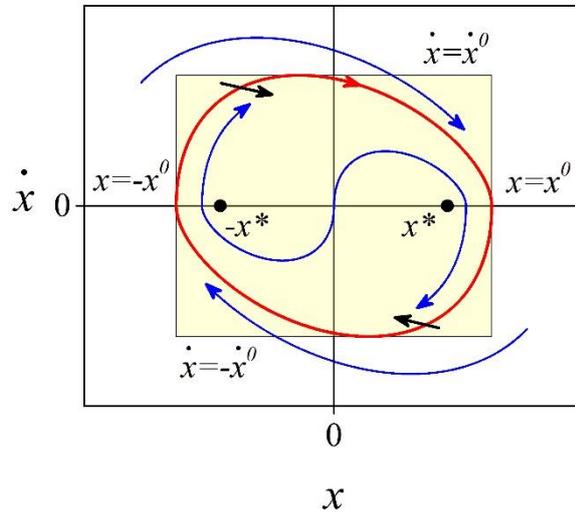


Рис. 1. Фазовый портрет системы (2). Предельный цикл  $l_c$  изображён красной линией. Чёрными стрелками указано направление векторного поля системы (1). Параметры:  $\varepsilon K = 1$ ,  $h = 1$ ,  $\omega = 1$ ,  $x^0 = 1.38958$ ,  $\dot{x}^0 = 1.30541$ .

**Следствие.** Выбирая кольцо  $D_\varphi$  и диск  $D_x$ , мы рассматриваем систему (1) в компактной области  $D = D_\varphi \times D_x$ , в которой величина  $\mu(x + a\dot{x})$  в правой части первого уравнения системы (1) ограничена:

$$\mu|x + a\dot{x}| \leq \mu(x^0 + ay^0) = \delta.$$

Введём две двумерные системы сравнения для оценки второго уравнения системы (1)

$$\begin{aligned} A^+ : \dot{\varphi} &= u, \quad \dot{u} + \lambda u + \sin \varphi = \gamma + \delta, \\ A^- : \dot{\varphi} &= u, \quad \dot{u} + \lambda u + \sin \varphi = \gamma - \delta. \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью этих систем сравнения доказывается теорема существования гомоклинической петли седло-фокуса [7] (бифуркационная диаграмма систем сравнения, а также образованные ими сепаратрисные каналы изображены на Рис. 2 и Рис. 3 соответственно). Эта теорема при условиях служит основным утверждением (6), гарантирующим существование хаотической компоненты неблуждающих траекторий системы (1). При определённых условиях эта компонента может быть базисной в диком аттракторе.

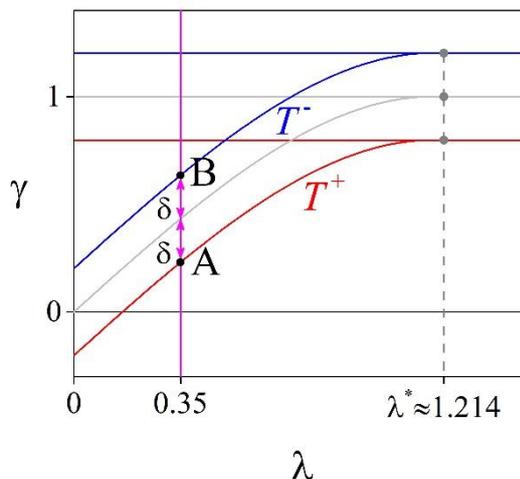


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма систем сравнения (3).

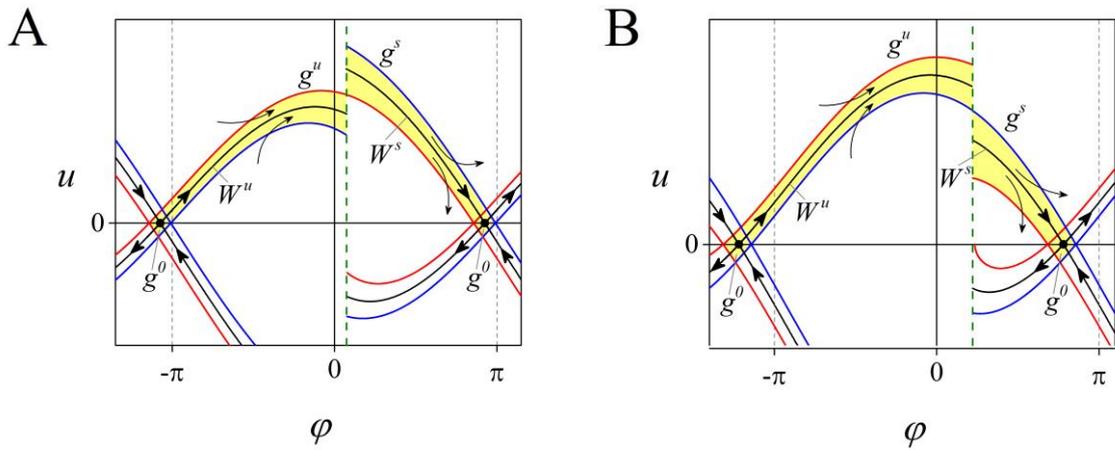


Рис. 3. Фазовые портреты систем сравнения (3). Траектории системы  $A^+$  изображены красным, траектории системы  $A^-$  - синим. Чёрным отмечены следы от многообразий  $W^s$ ,  $W^u$  седла системы (1). Сепаратрисы систем сравнения образуют сепаратрисные каналы  $g^u$  и  $g^s$ , взаимное расположение которых при изменении параметра  $\gamma$  доказывает существование гомоклинической орбиты седло-фокуса системы (1). (A)  $\gamma = 0.2304$ , (B)  $\gamma = 0.6346$ . Параметры:  $\lambda = 0.35$ ,  $\mu = 0.075$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\delta = 0.2021$ ,  $x^0 = 1.38958$ ,  $\dot{x}^0 = 1.30541$ .

Аналитические результаты поддержаны грантом РФФИ 18-01-00556. Численные результаты поддержаны грантом РНФ 19-12-00367.

### Список литературы:

- [1] Belykh, V.N., Pedersen, N.F. and Soerensen, O.H. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case // *Physical Review B*. – 1977. – Vol. 16. – №. 11. – pp. 4853-4859.
- [2] Belykh, V.N., Pedersen, N.F. and Soerensen, O.H. Shunted-Josephson-junction model. II. The nonautonomous case // *Physical Review B*. – 1977. – Т. 16. – №. 11. – С. 4860-4871.
- [3] Лихарев К.К., Ульрих Б.Т. Системы с джозефсоновскими контактами: основы теории. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 446 с.
- [4] Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов / К.К. Лихарев. - Москва: Наука, 1985.
- [5] Belykh, V.N., Verichev, N.N., Dynamics of a rotator coupled with an oscillator // *Radiophysics and Quantum Electronics*. – 1988. – Vol. 31. – Vol. 8. – pp. 657-663.
- [6] Belykh, V.N., Pankratova, E.V., Shilnikov chaos in oscillators with Huygens coupling // *Int. J. Bifurc. Chaos*. – 2014. – Vol. 24. – pp. 1440007.
- [7] Belykh, V. N., Homoclinic and heteroclinic orbits of a family of multidimensional dynamical systems // *Proc. Steklov Inst. Math. Dynamical Systems and Related Topics: Collections of Articles, (to the 60th Anniversary of Academician D. V. Anosov)*. – 1997. – Vol. 216. – pp. 14–26.

## WILD ATTRACTOR IN THE MODEL OF ROTATOR-OSCILATOR COUPLED VIA RIGHT HAND SIDES

Vladimir N. Belykh, Nikita V. Barabash

*Key words: wild attractor, coupled oscillators, homoclinic orbit, chaotic dynamics, Josephson junction.*

*The dynamics of a four-dimensional system of coupled rotator and oscillator, which simulates the dynamic behavior of a superconducting Josephson junction interacting with a linear oscillator, is considered. The fulfillment of the necessary conditions for the existence of a wild attractor, namely, the dissipativity of the system when expanding the volume of the leading manifold and the existence of a homoclinic bifurcation of the saddle-focus, is rigorously proved.*