ISBN 978-5-901722-63-3

УДК 517.9

Белых Владимир Николаевич, профессор, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», главный научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского.
Барабаш Никита Валентинович, аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», младший научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского.
Урусова Наталья Аркадьевна, к. ф.-м. н., доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ».
Мордвинкина Ирина Александровна, старший преподаватель кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ».

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волжский государственный университет водного транспорта» (ФГБОУ ВО «ВГУВТ»)
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (ННГУ)
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

АТТРАКТОРЫ КОНКРЕТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ: ПРИМЕР ГИПЕРХАОСА

Ключевые слова: аттрактор, отображение, гиперхаос, косое произведение.

Аннотация. В работе проведено исследование отображений с переменной структурой. Рассмотрено отображение, которое при одних итерациях является хаотическим, а при других – регулярным. Изучено отображение, изменение которого определяется внешним фактор-отображением. Приведены условия гиперхаоса этого косого отображения.

Рассматриваемые в работе отображения с переменной структурой [1-3] задаются уравнениями с дискретным временем вида

$$x(i+1) = F(x(i), u(i)), \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, F - n-вектор, $i \in \mathbb{Z}$ - дискретное время, $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^1$ - функция, меняющая отображение на каждом шаге. Эта функция может быть внешним воздействием, управлением или может задаваться динамическим уравнением

$$u(i+1) = f(u(i)). \qquad (2)$$

В этом случае отображение $u \to f(u)$ называют фактор-отображением [4, 5]. В работе рассматриваются различные примеры отображений с переменной структурой вида (1).

Задача 1. Пусть функция $u(i)$ периодична с периодом p, $u(i) = u(i+p)$. И пусть отображение $x \rightarrow F(x, u^*)$, где $u^* = \mathrm{const} \in [u(1), u(2), \dots, u(p)]$, имеет глобально устойчивую неподвижную точку $x^* = F(x^*, u^*)$. В работе приводятся условия, при которых отображение (1) имеет единственную p -периодическую глобально устойчивую орбиту. При этом очевидно необходимым условием служит условие того, что собственные значения якобиана $F_x(x, u^*)$ преобразования $x \rightarrow F(x, u^*)$ находились внутри единичного круга. Конкретным примером может служить неавтономное линейное уравнение вида $x(i+1) = Ax(i) + u(i)$, где A - сжимающий оператор.

Задача 2. Пусть функция $u(i) = a + \mu \mathrm{sign}(\gamma + \sin\frac{\pi i}{m})$, $a = \mathrm{const}$, $|\gamma| \leq 1$, в отображении (1). И пусть отображение $F(x, \mu)$ имеет хаотический аттрактор, а отображение $F(x, -\mu)$ - регулярный аттрактор, например, глобально устойчивую периодическую орбиту, причём целое число m определяет характерное время установления периодического режима. Тогда отображение (2) имеет хаотическую орбиту со свойством перемежаемости. Конкретным примером служит логистическое отображение

$$x(i+1) = u(i)x(i)(1 - x(i)), \tag{3}$$

где в функции $u(i)$ $a = 3.001$, $\mu = 0.999$ и $m = 50$, а параметр γ варьируется (см. Рис. 1).

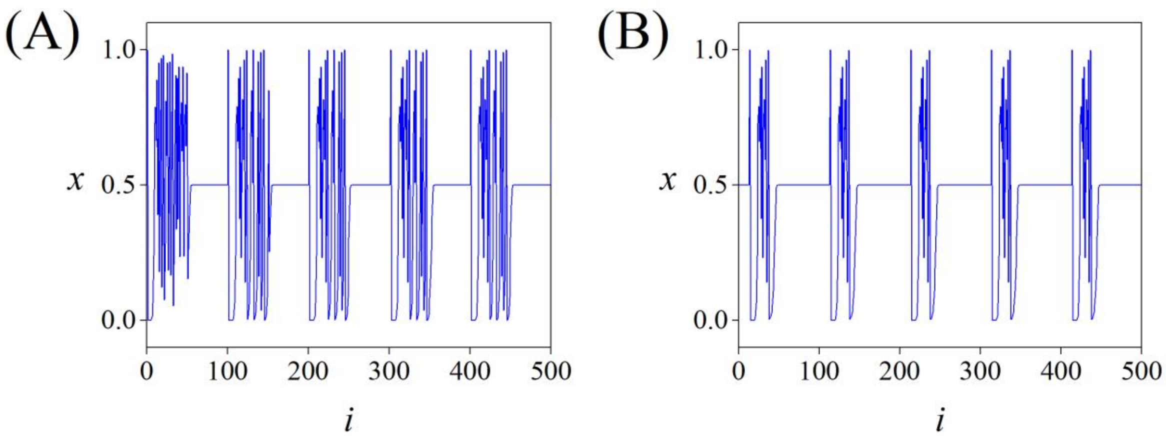

Рис. 1. Временная реализация отображения (3). (A) $\gamma = 0$. (B) $\gamma = -0.7$. Параметры: $a = 3.001$, $\mu = 0.999$ и $m = 50$.

Задача 3. Пусть отображение (2) является хаотическим, таким, что интервал $I = \{\alpha_1 \leq u \leq \alpha_2\}$, $\alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const}$, является инвариантным $f(I) \subseteq I$ и $|f'| > 1$ при $u \in I$. И пусть отображение $x \rightarrow F(x, u)$ при любом $u \in I$ имеет странный аттрактор, такой, что один из ляпуновских показателей положителен. Тогда в косом произведении [5] одномерного отображения (2) и, например, двумерного отображения (1) существует аттрактор со свойствами гиперхаоса, поскольку аттрактор этого отображения имеет два положительных показателя Ляпунова.

Конкретным примером служит отображение (1), (2), где отображение (2) есть «тент»-отображение

$$u(i+1) = \begin{cases} 2u(i), & 0 \leq u(i) < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2\mathrm{u(i)}, & \frac{1}{2} \leq \mathrm{u(i)} \leq 1, \end{cases} \tag{3}$$

а отображение (1) имеет вид [3]

$$\begin{pmatrix} x(i+1) \\ y(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ 0 & \lambda(u(i))B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(i) \\ y(i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ \lambda(u(i))b \end{pmatrix} g(x(i)), \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^n$, b, B - матрицы постоянных параметров, $b = \mathrm{column}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, B - $n \times n$ матрица, $\mathbf{1} = (1,1,\dots,1)$, a - скалярный параметр, $g(x)$ - скалярная функция, $|g'| > h > 1$, а скалярный параметр $\lambda(u(i))$ удовлетворяет условию $0 < \lambda(u(i)) < \lambda_0$. Предположим, что отображение (4) при любых $u \in [0,1]$ имеет в фазовом пространстве инвариантную область. Тогда из Теоремы 4.1 работы [3] следует, что в каждой точке инвариантной области существует один и тот же инвариантный конус, в котором отображение (4) действует как растяжение. Отсюда следует, что отображение (4) имеет положительный ляпуновский показатель. Поскольку для отображения (3) ляпуновский показатель $\ln 2 > 0$, то косое произведение отображений (3) и (4) имеет два положительных ляпуновских показателя, а это означает, что это отображение имеет «дикий» странный аттрактор со свойствами гиперхаоса.

Аналитические результаты поддержаны грантом РФФИ 18-01-00556. Численные результаты поддержаны грантом РНФ 19-12-00367.

Список литературы:

[1] В.Н. Белых, Н.К., Комраков, Б.С., Украинский, Н.А., Урусова. Об условиях существования гиперболических странных аттракторов на синхронном многообразии в системе связанных многомерных идентичных отображений // Вестник ВГАВТ. 2005. Вып. 14. С. 36-42.
[2] Belykh V., Ukrainsky B., A Discrete-time Hybrid Lurie Type System with Strange Hyperbolic Nonstationary Attractor. Dynamics and Control of Hybrid Mechanical Systems. World Scientific Series on Nonlinear Science Series B – Vol.14, World Scientific Publishing Co. 2010, p. 242.
[3] Belykh, V., Komrakov, N. and Ukrainsky, B. Hyperbolic attractors in a family of multidimensional maps with cusp-points. // In Proc. of int. conf. «Progress in nonlinear science» dedicated to the 100-th anniversary of A. Andronov. Nizhny Novgorod. – 2002. – Vol. 1. – pp. 31-38.
[4] Ефремова Л.С. Многозначные функции и неблуждающее множество некоторых косых произведений отображений интервала со сложной динамикой фактор-отображения // Математика. Известия ВУЗов. – 2016. – № 2. – С. 93- 98.
[5] Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: rigorous results // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019 (in press).

ATTRACTORS OF CERTAIN MAPS WITH CHANGING STRUCTURE: HYPERCHAOS EXEMPLE

Vladimir N. Belykh, Nikita V. Barabash, Natalia A. Urusova, Irina A. Mordvinkina

Key words: attractor, mapping, hyperchaos, skew product.

We study mappings changing their structure along iterations. The map which is chaotic for one set of iterations and is regular for another is considered. The map changing its structure under an additional master map is studied. The conditions when this skew map is hyperchaotic are derived.