ISBN 978-5-901722-63-3

УДК 517.925/.926

Белых Владимир Николаевич, профессор, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ»
Гречко Дина Алексеевна, магистрант ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волжский государственный университет водного транспорта» (ФГБОУ ВО «ВГУВТ»)
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРА И РОЖДЕНИЕ ПОДКОВЫ СМЕЙЛА В МНОГОМЕРНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ТИПА ЭНО

Ключевые слова: многомерное отображение, отображение Эно, аттрактор, подкова Смейла, биффуркация,

Аннотация. В работе рассматривается многомерное отображение Эно, для которого проводится доказательство существования аттрактора, его локализация, а также нахождение условий, при которых данное отображение имеет подкову Смейла. В работе приводится геометрическое доказательство существования подковы Смейла в многомерном отображении Эно.

Задача об условиях существования аттракторов и биффуркаций, формулируемых в терминах правых частей динамических систем, возникла при анализе состояний равновесия предельных циклов Пуанкаре и гомоклинических петель сепаратрис в конкретных системах. В период последних почти 50 лет эта задача приобрела широкий интерес в связи с возникновением концепции странного аттрактора как образа динамического хаоса.

В данной работе рассматривается многомерное отображение Эно общего вида:

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j v_j\,; \\ \overline{v_1} = x; \\ \overline{v_i} = v_{i-1}, i = \overline{2, n}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_i \in R^1$, $f(x)$ – квадратичная функция вида

$$\begin{gathered} f(x) = \mu - x^2; \\ \mu \in R^1. \end{gathered} \qquad (2)$$

Отображение Эно рассматривалось во многих работах [1 – 10, 18 – 20]. Существование подковы Смейла отображения Эно геометрически доказано в двумерном случае, см., например, [11, 12]. В многомерном случае, когда отображение близко к одномерному, доказательство существования подковы Смейла на языке символической динамике проведено в [20]. Целью настоящей работы является геометрическое доказательство существования подковы Смейла в общем случае.

Диссипативность многомерного отображения Эно

Путём последовательных замен $v_j = u_j + x, j = \overline{1,n},\ u_0 \equiv 0$ и $a_1 u_1 = y_1, \dots, a_n u_n = y_n\ \left(a_j u_j = y_j\right)$, а также при введении обозначений

$$Y = \sum_{j=1}^{n} y_j \tag{3}$$

$$q_1 = \frac{a_2}{a_1}, q_2 = \frac{a_3}{a_2}, \dots, q_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \tag{4}$$

исходное отображение (1) записывается в виде нормальной формы [15] отображения с одной нелинейностью $x \to \Phi(x), x = (x; y_1; \dots; y_n)$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + Y + F(x); \\ \overline{y_1} = -a_1\big(Y + F(x)\big); \\ \overline{y_2} = q_1 y_1 - a_2\big(Y + F(x)\big); \\ \dots \\ \overline{y_i} = q_{i-1} y_{y-1} - a_i\big(Y + F(x)\big); \\ \dots \\ \overline{y_n} = -q_{n-1} y_{n-1} - a_n\big(Y + F(x)\big), \end{cases} \tag{5}$$

где

$$F(x) = \mu - (1 - A)x - x^2. \tag{6}$$

Введем норму в пространстве $(y_1, \dots, y_n)$:

$$\|y\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|. \tag{7}$$

Будем рассматривать отображение (5) в области

$$G = \{x, y | \alpha_1 \le x \le \alpha_2, \|y\| \le \gamma\} \tag{8}$$

Параметры α_1 и α_2 ниже будут выбраны так, чтобы область G содержала интересующее нас неблуждающее множество отображения (5).

В области G непрерывная функция $F(x)$ ограничена

$$|F(x)| < M, \text{при } x \in (\alpha_1, \alpha_2)$$

Будем считать, что параметры $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяют условиям

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j > 0; \qquad \left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| = q_j, \text{где } 0 < q_j < q < 1. \tag{9}$$

В этом случае сумма $A^+ = \sum_{j=1}^{n} |a_j|$ удовлетворяет условию

$$A^+ = \sum_{j=1}^{n} |a_j| < \frac{|a_1|(1 - q^n)}{1 - q} < \frac{|a_1|}{1 - q}. \tag{10}$$

При использовании неравенства (10) получено условие диссипативности отображения (5) по переменным y_j

<u>Теорема 1:</u> *При*

$$\gamma = \frac{A^+ M}{1 - A - q} \tag{11}$$

образ области G лежит в области $G_y = \{y |\ \|y\| < \gamma\}$.

Локализация аттрактора Эно

При условии теоремы 1 в первом уравнении отображения (5) в области G (8) сумма $\sum_{j=1}^{n} y_j$ ограничена

$$-\gamma < \sum_{j=1}^{n} y_j < \gamma, \tag{12}$$

где параметр γ считаеися определённым равенством (11). Вводятся отображения сравнения

$$\bar{x} = \pm\gamma + \mu - x^2 + Ax \tag{13}$$

Сдвиг $x = \frac{A}{2} + x_{new}$ (Рис. 4) приводит отображение (5) к виду

$$\begin{gathered} \bar{x} = x + \sum_{j=1}^{n} y_j + \mu + \frac{A^2}{4} - \frac{A}{2} - x^2; \\ \overline{y_i} = q_{i-1} y_{y-1} - a_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + F\left(\frac{A}{2} + x\right) \right) \end{gathered} \tag{14}$$

где $j = \overline{1, n}, q_0 = 0$.

Отображения сравнения (13) приобретают при сдвиге вид отображения Mira

$$\bar{x} = \tilde{\mu} \pm \gamma - x^2 = g^{\pm}(x), \tag{15}$$

где $\tilde{\mu} = \mu + {A^2}/{4} - {A}/{2}$.

<u>Лемма 1.</u> При условии

$$g^{-}(\tilde{\mu} + \gamma) \geq x_1^{-}, \tag{16}$$

где x_1^{-} – неустойчивая неподвижная точка отображения $g^{-}(x)$ (меньший корень уравнения $\tilde{\mu} - \gamma - x^2 = x$), все образы координат x точек линий l_c лежат на интервале $(x_1^{-}, \tilde{\mu} + \gamma)$.

Точка $\mu^{+} = \tilde{\mu} + \gamma$ есть неибольший образ отображений $g^{-}(x)$ и $g^{+}(x)$. Если

$$g^{-}(\mu^{+}) \geq x_1^{-}, \tag{17}$$

то интервал (α_1, α_2), где $\alpha_1 = x_1^{-}, \alpha_2 = \mu^{+}$, является инвариантным, т.е. все образы координат x прямых l_c действительно лежат на этом интервале.

<u>Теорема 2.</u> *При условиях теоремы 1 и Леммы 1 отображение (5) в области G (8) имеет аттрактор.*

Многомерная подкова Смейла отображения Эно.

Рассмотрен случай, когда оба отображения сравнения имеют одномерную подкову Смейла, т.е. при условии

$$\tilde{\mu} + \gamma > \tilde{\mu} - \gamma > 2. \tag{18}$$

Обозначим $x_1^{+} -$ неустойчивую неподвижную точку отображения $g^{+}(x)$ (мениший корень уравнения $\tilde{\mu} + \gamma - x^2 = x$). Рассмотрим отображение (5) при условии

$$\begin{gathered} \alpha_1 = x_1^{+}; \\ \alpha_2 = -x_1^{+}; \\ \tilde{\mu} - \gamma > -x_1^{+}. \end{gathered} \tag{19}$$

Обозначим

$$l_c = \left\{ y_j = const, j = \overline{1, n};\ \sum_{j=1}^{n} y_j = C, x \in (\alpha_1, \alpha_2) \right\} \tag{20}$$

есть семейство линий, лежащих в G. Образ gl_c есть параметрически заданное семейство кривых $\bar{x}(x), \overline{y_j}(x), x \in (\alpha_1, \alpha_2)$, получаемая из (5) при постоянных значениях y_j.

В силу условий (18) и (19), образ gl_c есть подкова Смейла.

Таким образом, в работе проведено геометрическое доказательство существования подковы Смейла многомерного отображения Эно.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00556-а).

Список литературы:

[1]. M. Hénon (1976). "A two-dimensional mapping with a strange attractor". Communications in Mathematical Physics. 50 (1): 69–77.
[2]. Gonchenko S., Li M.-Ch., Malkin M. Generalized H´enon maps and Smale horseshoes of new types //Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2008, vol. 18, no. 10, pp.3029–3052.
[3]. Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D. Three-dimensional Henon-likemaps and wild Lorenz-like attractors.Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15,No. 11. Pp. 3493–3508.
[4]. Benedicks M., Carleson L.The dynamics of the Henon map // Ann. Math. 1991.Vol. 133. Pp. 73–169.
[5]. Lozi R.Un attracteur de Henon // J. Phys. 1978. Vol. 39. Coll-C5. Pp. 9–10
[6]. Gonchenko A., Gonchenko S.Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps // Physica D. 2016. Vol. 337. Pp. 43–57
[7]. Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I., Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation , Regular and Chaotic Dynamics, 2006, vol. 11, no. 2, pp. 191-212
[8]. J.F. Heagy, “A physical interpretation of the H´enonmap,”Phys. D57(1992) 436-446.
[9]. D. Sterling, H. R. Dullin, J. D. Meiss, “Homoclinic bifur-cations for the H´enon map,”Phys. D134(1999) 153-184.
[10]. B. V. Chirikov, “A univeral instability of many dimen-sional oscillator systems,”Phys.Rep.Vol.525(1979)263-379
[11]. Ильяшенко Ю. С. Эволюционные процессы и философия общности положения.— М.: МЦНМО, 2007.
[12]. Ильяшенко Ю.С., Вейгу Л. Нелокальные бифуркации. — М.: МЦНМО-ЧеРо, 1999. — 416 с.
[13]. Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 200. С. 356
[14]. Mira C. Chaotic dynamics fromthe One–Dimensional Endomophism to theTwo–Dimentional Diffeomorphism. — Singapore:World Scientific, 1987.
[15]. V.N. Belykh, “Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map”, *Sb. Math.*, **186**:3 (1995), 311–326
[16]. Tien-Yien Li and James A Yorke. Period three implies chaos.The American MathematicalMonthly, 82(10):985–992, 1975.
[17]. Smale, Stephen, Morris W. Hirsch, and Robert L. Devaney, Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Vol. 60. Academic Press, 2003. (Chapter «Discrete dynamical systems.» pp. 327–357).
[18]. В. С. Афраймович, В. И. Некоркин, “Устойчивые состояния в цепочечных моделях неограниченных неравновесных сред”, Матем. моделирование, 3:12 (1991), 65–77
[19]. Алексеев В.М. Символическая динамика //Одиннадцатая летняя математическая школа. - Киев: Из-во Ин-та математики АН УССР, 1976.
[20]. M.-C. Li, M. Malkin, «Topological horseshoes for perturbations of singular diaerence equations», Nonlinearity, 19 (2006), 795-811.
[21]. Одномерные отображения: самоподобие, бифуркации и хаос Белых В.Н. // СОЖ, 2004, No 2, с. 106–111

ATTRACTOR LOCALIZATION AND HORSESHOE MAP APPEARANCE IN A MULTIDIMENSIONAL HENON MAP

V.N. Belykh, D.A. Grechko

Key words: Henon map, Horseshoe map, attractor, bifurcation, multidimensional map.

We consider multidimensional Henon-like map. The problem of the attractor localization is studied. We derive the conditions when the map has multidimensional Smale horseshoe. The main features of this statement geometrical proof is presented.