ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ВНУТРЕННИХ ВОДНЫХ ПУТЕЙ В БАССЕЙНАХВЕЛИКИХ РЕК
Труды конгресса «Великие реки» 2019
Выпуск 8, 2019 г.
ISBN 978-5-901722-63-3

УДК 517.9

Белых Владимир Николаевич, профессор, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ»
Кащеева Ольга Николаевна, к.ф-м.н., доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ»

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волжский государственный университет водного транспорта» (ФГБОУ ВО «ВГУВТ»)
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ В СИСТЕМЕ С ТРЕМЯ РАВНОВЕСИЯМИ

Ключевые слова: динамические системы, гомоклинические орбиты, бифуркации, странный аттрактор.

В работе исследуется система четвертого порядка с тремя состояниями равновесия, содержащая нелинейности в виде полиномов третьей и пятой степени.
Рассматриваются вспомогательные системы сравнения второго порядка, для которых проведено детальное исследование бифуркаций коразмерности 1. При помощи этих систем доказано существование бифуркации гомоклинической восьмерки седло-фокуса, приводящей к рождению странного аттрактора.

Рассматривается четырехмерная система:

$$\dot{x} = u \quad (1-\varepsilon^2)\dot{u} + \lambda f(x,u)u + g(x) - \varepsilon(hv + \Omega^2 y) = 0 \qquad (1)$$
$$\dot{y} = v \quad (1-\varepsilon^2)\dot{v} + hv + \Omega^2 y - \varepsilon\big(\lambda f(x,u)u + g(x)\big) = 0^{\boldsymbol{\cdot}}$$

Здесь $f(x,u) = (x^2-1)^2 + \alpha u^2 - a$, $g(x) = x^3 - x$; a – произвольный параметр, $\alpha, \lambda, h, \Omega, \varepsilon$ – положительные параметры. Данная система имеет три состояния равновесия $O_l(x_l, 0,0,0)$, где $l = \overline{0,2}$, $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$. При малых значениях параметра ε состояния равновесия $O_{1,2}(\mp 1,0,0,0)$ являются седлами, а начало координат $O_0(0,0,0,0)$ – это седло-фокус с одномерным неустойчивым многообразием W^u_{loc} и трехмерным устойчивым многообразием W^s_{loc}.

Для изучения бифуркаций системы (1) в работе используется метод двумерных систем сравнения ([1],[2],[3]). В качестве вспомогательной системы рассматривается следующая двумерная система

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \gamma - f(x)u - g(x) \end{pmatrix} \triangleq F(x,u),. \qquad (2)$$

где $f(x) = \lambda((x^2-1)^2 + \alpha u^2 - a)$, $g(x) = x^3 - x$; $\alpha, \lambda, a, \gamma$ – параметры, удовлетворяющие условиям: $0 < \alpha \le 2, \lambda \ge 0$.

Данная система имеет симметрию $(x,u,\gamma) \to (-x,-u,-\gamma)$, т.е. фазовые портреты для $\gamma < 0$ аналогичны фазовым портретам для $\gamma > 0$, а при $\gamma = 0$ фазовые картины симметричны относительно начала координат. При $|\gamma| < \sqrt{3}/3$ система (2) имеет три состояния равновесия: $O_0(x_0, 0), O_1(x_1, 0)$ и $O_2(x_2, 0)$, где $x_0 = 0$, $x_{1,2} = \mp 1$ в случае $\gamma = 0$

и $x_0 = -\gamma$, $x_{1,2} = \mp\gamma + \gamma/2$ в случае малого положительного параметра γ. Состояние равновесия $O_0(x_0, 0)$ является седлом, а $O_{1,2}(x_{1,2}, 0)$ – фокусы.

Введем следующие обозначения: $S^{\alpha(\omega)} = \{u = u^{\alpha(\omega)}(x)\}$ – неустойчивые (устойчивые) сепаратрисы седла $O_0(x_0, 0)$; $\Delta^+(a) = x^\omega - x^\alpha$ – расстояние между сепаратрисами на секущей $\{u = 0, x > x_2\}$ (здесь $u^{\alpha(\omega)}(x^{\alpha(\omega)}) = 0$); $\Delta^-(a) = x^\alpha - x^\omega$ – расстояние между сепаратрисами на секущей $\{u = 0, x < x_1\}$; $\Delta^0(a) = u^\omega(x_0) - u^\alpha(x_0)$ – расстояние между сепаратрисами на секущей $\{x = x_0, u > 0\}$. При рассматриваемых значениях на параметры эти расстояния являются гладкими монотонными функциями параметра a.

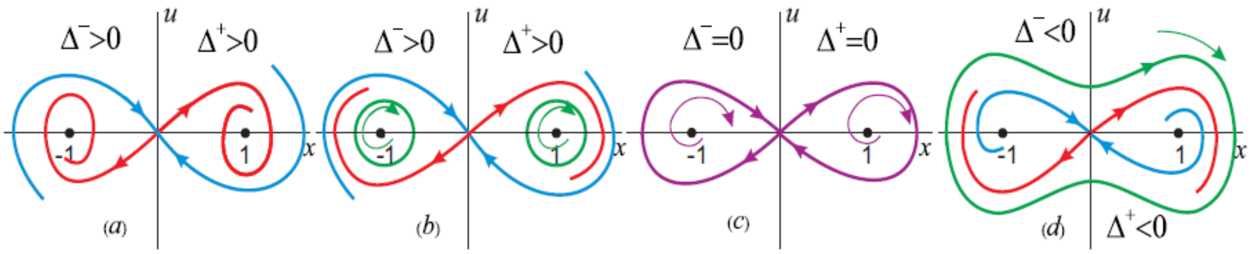

Рис. 1 Изменения фазовых портретов системы (2) при возрастании параметра a вслучае $\gamma = 0$.

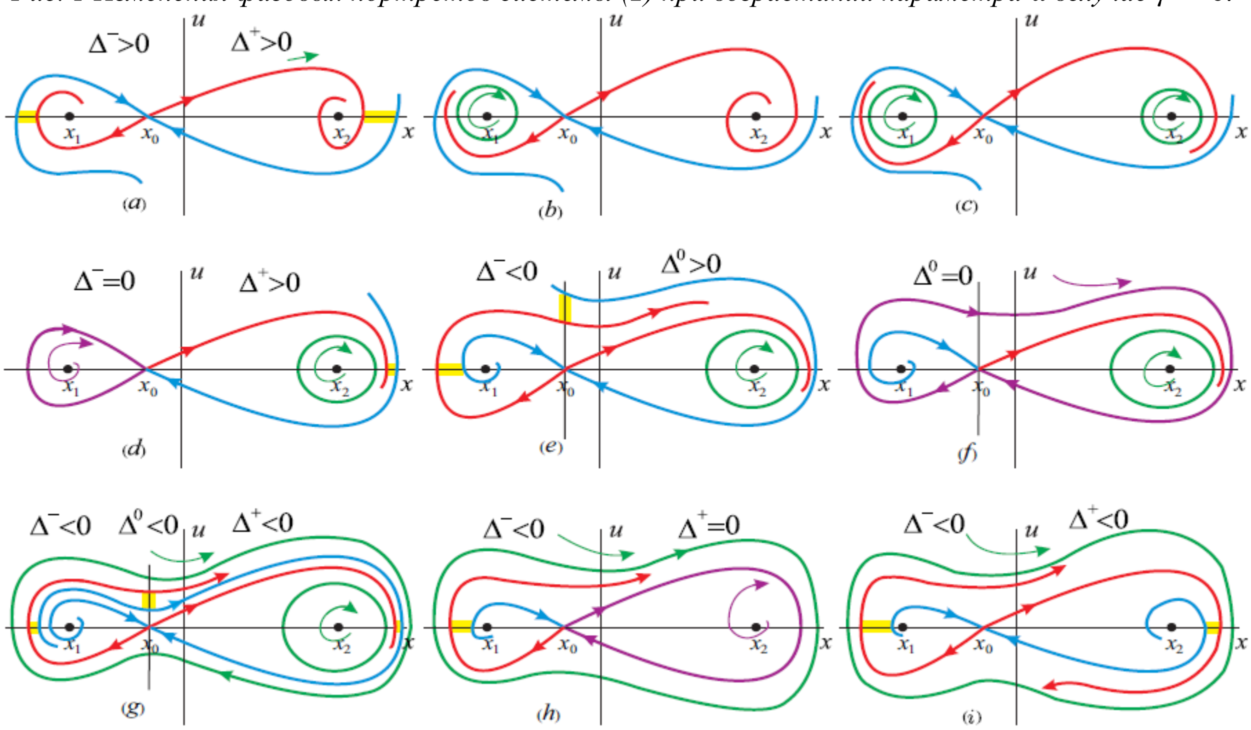

Рис. 2 Изменения фазовых портретов системы (2) при возрастании параметра a вслучае $\gamma > 0$.

Теорема 1. *В случае $\gamma = 0$ возрастание параметра a в системе (2) приводит к следующим бифуркациям:*

a) бифуркация Андронова-Хопфа при $a = 0$, приводящая к рождению двух устойчивых предельных циклов (Рис. 1 (a)-(b));

b) появление гомоклинической восьмерки при $a = a_h < 1$ (Рис. 1 (c));

c) рождение единственного устойчивого предельного цикла при $a > 1$.

В случае $\gamma \in (0, \sqrt{3}/3)$ имеет место следующая последовательность бифуркаций:

a) бифуркации Андронова-Хопфа при $a_1 = (x_1^2 - 1)^2$ и $a_2 = (x_2^2 - 1)^2$ (Рис. 2 (a)-(b)-(c));

b) рождение гомоклинической орбиты Γ_1 $(x < x_0)$ при $a = a_{hl}^+$, приводящее к исчезновению устойчивого предельного цикла (Рис. 2 (c)-(d));

c) *рождение гомоклинической орбиты* Γ_0 $(x < x_0)$ *при* $a = a_{hom}$ *(Рис. 2 (f));*
d) *рождение устойчивого предельного цикла при* $a > 1$ *(Рис. 2 (g));*
e) *рождение гомоклинической орбиты* Γ_2 $(x > x_0)$ *при* $a = a_{hr}^{+}$, *(Рис. 2 (h)).*

При помощи метода двумерных систем сравнения доказано существование бифуркационной поверхности $a = a^*(\lambda, h, \Omega, \varepsilon)$, соответствующей гомоклинической восьмерке для исходной системы (1). Кроме того, при

$$h^2 + 2h\lambda(1 - a) < 4(1 - \varepsilon^2)$$

седловая величина положительна, т.е. седло-фокус $O_0(0,0,0,0)$ удовлетворяет условию Шильникова ([4],[5]), что приводит к рождению странного аттрактора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18–01–00556 А).

Список литературы:

[1] Belykh, V.N. Homoclinic and heteroclinic orbits of a family of multidimensional dynamical systems.//Proc. of the Steklov Inst. Math. “Dynamical systems and related topics: collections of articles. To the 60-th anniversary of academician D.V. Anosov”. 216 (1997). – P. 14–26.
[2] Belykh, V.N. Homoclinic and heteroclinic lincages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps.// Advances in the Mathematical Sciences, American Math. Soc. Translations, Series 2, 200(2000). – P. 51–62.
[3] Belykh V.N., Pankratova E.V., Shilnikov Chaos in Oscillators With Huygens Coupling.// Int. J. Bifurcation Chaos. 24:8 (2014):1440007
[4] Shilnikov, L.P. A case of the existence of a denumerable set of periodic motions.// Sov. Math. Dokl. 6 (1965). – P. 163–166.
[5] Shilnikov, L.P. & Shilnikov, A.L. Shilnikov bifurcation.// Scholarpedia. 2(8) (2007): 1891.

BIFURCATIONS LEADING TO THE BIRTH OF STRANGE ATTRACTOR IN A SYSTEM WITH THREE EQUILIBRIA

Vladimir N. Belykh, Olga N. Kashcheeva

Key words: dynamical systems, homoclinic orbits, bifurcations, strange attractor.

We provide an investigation of four-dimensional dynamical system with nonlinearities of third and fifth degree.
Auxiliary two-dimensional systems are considered. A detailed analysis of their bifurcations is provided.
An existence of homoclinic “figure-eight” orbits leading to the birth of strange attractor is proved with the help of two-dimensional comparison systems.