



УДК 656.628.1

**Альпидовский Андрей Дмитриевич**, доцент, к.т.н., доцент кафедры Управления транспортом,  
«Волжский государственный университет водного транспорта» (ФГБОУ ВО «ВГУВТ»)  
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

### ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНИРОВАНИЯ РАБОТЫ ФЛОТА В КОНЕЧНЫЙ ПЕРИОД НАВИГАЦИИ

*Аннотация.* В статье приведена экономико-математическая модель оптимизации планирования работы речного флота в конечный период навигации и представлена симплексная матрица модели.

*Ключевые слова:* план оптимального использования флота в конечный период навигации, план вывода флота из эксплуатации, задача целочисленного программирования, симплексная матрица, функция Excel «Поиск решения».

Для описания экономико-математической модели (ЭММ) обоснования плана оптимального использования флота в конечный период навигации [1] введем следующие обозначения:

$p$  – индекс судна (состава);

$r$  – индекс рейса ввода судна на линию работы;

$n$  – индекс рейса вывода судна из эксплуатации;

$s$  – индекс суток вывода судна из эксплуатации (порядковый номер от начала периода);

$q$  – индекс суток прибытия судна на базу зимнего отстоя (ремонтно-эксплуатационную базу – РЭБ);

$c_{npk}^{jlq}$  – значение оценочного показателя по  $p$ -му судну  $j$ -го типа, выводимого из эксплуатации  $n$ -м рейсом с  $k$ -й линии работы и прибывающего в  $l$ -ю РЭБ на  $q$ -е сутки периода;

$x_{npk}^{jlq}$  – число отправок  $p$ -го судна  $j$ -го типа, выводимого из эксплуатации  $n$ -м рейсом с  $k$ -й линии работы в  $l$ -ю РЭБ на  $q$ -е сутки периода (целое, булева типа: 0 или 1);

$x_{npk}^{jl}$  – число отправок  $p$ -го судна  $j$ -го типа, выводимого из эксплуатации с  $k$ -й линии работы в  $l$ -ю РЭБ  $n$ -м рейсом (целое,  $>0$ );

$x_p^{jl}$  – фиксированная целочисленная переменная, обозначающая наличие на линиях работы  $p$ -го судна в конечный период навигации ( $>0$ );

$x_{rp}^{jl}$  – число отправок  $p$ -го судна  $j$ -го типа из  $l$ -й РЭБ на  $r$ -м рейсе ввода на линию работы (целое,  $>0$ );

$x_{rpk}^{jl}$  – число отправок  $p$ -го судна  $j$ -го типа из  $l$ -й РЭБ на  $k$ -м круговом рейсе (целое,  $>0$ );

$x_{np}^{jl}$  – число отправлений  $p$ -го судна  $j$ -го типа из  $l$ -й РЭБ на  $n$ -м рейсе вывода судна из эксплуатации ( $>0$ );

$N_{pk}^{jl}$  – подмножество рейсов вывода из эксплуатации  $p$ -го судна  $j$ -го типа, приписанного к  $l$ -й РЭБ;

$F_{np}^{jl}$  – затраты  $p$ -го судна  $j$ -го типа, приписанного к  $l$ -й РЭБ, на выполнение  $n$ -го рейса вывода из эксплуатации (тыс. тнж-сут.);

$F_{rp}^{jl}$  – затраты  $p$ -го судна  $j$ -го типа, приписанного к  $l$ -й РЭБ, на выполнение  $r$ -го рейса ввода на линию работы (тыс. тнж-сут.);

$S_{ql}$  – величина, обозначающая число единиц судов всех типов, может быть принято в  $l$ -й РЭБ на  $q$ -е сутки конечного периода (ед.);

$P_{pk}^{jl}$  – потребность в  $p$ -м судне  $j$ -го типа из  $l$ -й РЭБ на одно отправление на  $k$ -й линии работы (ед.);

$P_{npk}^{jl}$  – потребность в  $p$ -м судне  $j$ -го типа из  $l$ -й РЭБ, выводимого из эксплуатации  $n$ -м рейсом, на одно отправление на  $k$ -й линии работы (ед.);

$P_{npk}^{jlq}$  – потребность в  $p$ -м судне  $j$ -го типа из  $l$ -й РЭБ, выводимого из эксплуатации  $n$ -м рейсом, завершающимся в  $q$ -е сутки конечного периода (ед.).

В соответствии с принятыми обозначениями ЭММ обоснования плана использования флота в конечный период навигации имеет следующий вид.

Требуется определить такой план оптимального использования флота и вывода его из эксплуатации  $\{x_{npk}^{jlq}, x_{rp}^{jl}, x_{jk}, x_u\}$ , при котором значение функции цели достигало бы своего минимума:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{J_k} c_{jk} x_{jk} + \sum_{u=1}^I c_u x_u + \sum_{j=1}^{J^l} \sum_{p=1}^P \sum_{r=1}^{R_{pk}^{jl}} c_{rp}^{jl} x_{rp}^{jl} + \\ & + \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^{J^l} \sum_{k=1}^{K^{jl}} \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{n=1}^{N_{pk}^{jl}} \sum_{q=1}^{t_q} c_{npk}^{jlq} x_{npk}^{jlq} \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (1)$$

при следующих ограничениях линейной формы:

1. Каждый грузопоток конечного периода должен быть полностью освоен имеющимися ресурсами флота:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{J_k} Q_{jk}^i x_{jk} + Q_u x_u + \sum_{j=1}^{J^l} \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{r=1}^{R_{pk}^{jl}} Q_r^{jli} x_{rp}^{jl} + \\ & + \sum_{j=1}^{J^l} \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{n=1}^{N_{pk}^{jl}} Q_n^{jli} x_{np}^{jl} = G_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $i = \overline{1, I}$ .

2. Суммарные затраты флота каждого типа не должны превышать ресурсы этого типа флота в периоде:

$$\sum_{k=1}^K F_{jk} x_{jk} + \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{r=1}^{R_{pk}^{jl}} F_{rp}^{jl} x_{rp}^{jl} + \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{n=1}^{N_{pk}^{jl}} F_{npk}^{jl} x_{npk}^{jl} \leq \Phi_j, \quad (3)$$

где  $j = \overline{1, J}$ .

3. Затраты флота условного типа не должны превышать его ресурсы в периоде:

$$\sum_{u=1}^I F_u x_u = \Phi_u. \quad (4)$$

4. Выбор однозначного варианта ввода  $p$ -го судна на линию работы

$$\sum_{r=1}^{R_{rp}^{jl}} x_{rp}^{jl} = x_p^{jl} . \quad (5)$$

5. Продолжительность работы  $p$ -го судна на  $k$ -й линии работы не должна превышать продолжительность периода

$$x_{rpk}^{jl} P_{pk}^{jl} - x_p^{jl} \leq 0, \quad (6)$$

где  $j = \overline{1, J}$ ,  $p = \overline{1, P}$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

6. Соответствие числа отправок однотипных судов из разных баз зимнего отстоя общему числу отправок флота конкретного типа на линии работы

$$\sum_{p=1}^{P_k} \sum_{r=1}^{R_{pk}^{jl}} x_{rpk}^{jl} = x_{jk}, \quad (7)$$

где  $j = \overline{1, J}$ ;  $k = \overline{1, K}$ .

7. Выбор однозначного варианта вывода  $p$ -го судна из эксплуатации:

$$\sum_{n=1}^{N_{pk}^{jl}} x_{np}^{jl} = x_p^{jl} . \quad (8)$$

8. Выбор однозначного варианта вывода  $p$ -го судна из эксплуатации в конкретные сутки конечного периода:

$$\sum_{q=s+t_{npk}^{60\%jl}}^{t_3} x_{npk}^{jlq} = x_{np}^{jl} . \quad (9)$$

9. Ограничение по периоду использования конкретного судна с учетом времени на вывод его из эксплуатации:

$$P_{npk}^{jl} x_{npk}^{jl} + P_{npk}^{jlq} x_{npk}^{jlq} \leq x_{np}^{jl}, \quad (10)$$

где  $p = \overline{1, P}$ .

10. Соответствие числа отправок однотипных судов из разных баз зимнего отстоя общему числу отправок флота этого типа на конкретном маршруте при выводе его из эксплуатации:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{n=1}^{N_{pk}^{jl}} x_{npk}^{jl} = x_{jk} . \quad (11)$$

11. Число выводимых из эксплуатации судов в каждую базу зимнего отстоя должно соответствовать приписанному к этой базе количеству флота:

$$\sum_{p=1}^{P_{jl}} \sum_{n=1}^{N_{jl}} x_{np}^{jl} = f_{jl}, \quad (12)$$

где  $j = \overline{1, J}$ ;  $l = \overline{1, L}$ .

12. Число судов, прибывающих в  $l$ -ю базу зимнего отстоя на  $q$ -е сутки конечного периода не должно превышать установленного значения:

$$\sum_{j=1}^{J_l} \sum_{k=1}^{K^l} \sum_{p=1}^{P_{jl}} \sum_{n=1}^{N_{jl}} x_{npk}^{jlq} = S_{ql}, \quad (13)$$

где  $s = \overline{1, t_3}$ ,  $l = \overline{1, L}$ ,  $q = \left\{ s + \left[ t_{npk}^{\text{выб}jl} \right] \right\}$ ,  $t_3$ .

Введение дополнительных переменных в ЭММ (связанных с количеством отправок флота так называемого «условного типа») необходимо для получения решения задачи в том случае, когда уравнения и неравенства модели несовместны [2].

При этом флот условного типа имеет оценочные показатели заведомо невыгодные, с точки зрения значения функции цели (большие на порядок, чем «реальный» флот, в случае решения задачи на минимум).

Сформулированная задача является задачей частично-целочисленного программирования [3]. Исходная симплексная матрица ЭММ представлена в таблице 1.

Таблица 1

**Симплексная матрица ЭММ оптимизации плана использования флота в конечный период навигации**

Номер строки	Схема использования флота условного типа			Варианты использования судов в конечном периоде						Базовая схема использования флота			Варианты использования судов при выводе из эксплуатации						Варианты рейсов ввода на линии работы						
	$X_1$	$X_{\dots}$	$X_0$	$X_{111}^{11}$	$X_{11k}^{11}$	$X_{11k}^{j1}$	$X_{\dots}^{j1}$	$X_{\dots}^{L1}$	$X_{\dots}^{L1}$	$X_{11}$	$X_{1k}$	$X_{1k}$	$X_{111}^{11}$	$X_{\dots}^{11}$	$X_{11k}^{j1}$	$X_{\dots}^{j1}$	$X_{11k}^{L1}$	$X_{\dots}^{L1}$	$X_{11}^{11}$	$X_{\dots}^{11}$	$X_{11}^{j1}$	$X_{\dots}^{j1}$	$X_{11}^{L1}$	$X_{\dots}^{L1}$	
1	$Q_1$								$Q_{11}^{11}$									$Q_1^{111}$	$Q_{11}^{111}$	...					
2		$Q_{\dots}$								$Q_{1k}^{j1}$											$Q_{11}^{j1}$	$Q_{11}^{L1}$	...		
3			$Q_0$								$Q_{1k}^{L1}$												$Q_{11}^{L1}$	$Q_{11}^{L1}$	
4									$F_{11}$									$F_{11}^{11}$	$F_{11}^{11}$	...					
5										$F_{1k}$											$F_{11}^{j1}$	$F_{11}^{L1}$	...		
6											$F_{1k}$												$F_{11}^{L1}$	$F_{11}^{L1}$	
7	$F_1$	$F_{\dots}$	$F_1$																						
8																			1	1	...				
9																					1	1			
10																							1	1	
11					$P_{111}^{11}$														-1						
12						$P_{11k}^{11}$														-1					
13							$P_{11k}^{j1}$														-1				
14								$P_{11k}^{L1}$														-1			
15									$P_{11k}^{L1}$															-1	
16										$P_{11k}^{L1}$															-1
17					-1	-1				1															
18							-1				1														
19							-1	-1	-1			1													

Продолжение таблицы 1

Номер строки	Наличие флота в конечном периоде			Варианты рейсов вывода судов из эксплуатации						Варианты суток вывода судов из эксплуатации						Столбец свободных членов									
	$X_1^{11}$	$X_{\dots}^{j1}$	$X_0^{L1}$	$X_{111}^{11}$	$X_{11k}^{11}$	$X_{\dots}^{j1}$	$X_{\dots}^{L1}$	$X_{\dots}^{L1}$	$X_{111}^{11}$	$X_{111}^{11}$	$X_{111}^{11}$	$X_{11k}^{j1}$	$X_{\dots}^{j1}$	$X_{\dots}^{L1}$	$X_{11k}^{L1}$		$X_{\dots}^{L1}$	$X_{11k}^{L1}$							
1				$Q_1^{111}$	$Q_{11}^{111}$	...																		$= G_1$	
2						$Q_{11}^{j1}$	$Q_{11}^{L1}$	...																	$= G_2$
3								$Q_{11}^{L1}$	$Q_{11}^{L1}$																$= G_3$
4				$F_{11}^{11}$	$F_{11}^{11}$	...																			$\leq \Phi_4$
5						$F_{11}^{j1}$	$F_{11}^{L1}$	...																	$\leq \Phi_5$
6								$F_{11}^{L1}$	$F_{11}^{L1}$																$\leq \Phi_6$
7																									$\leq \Phi_7$
8	-1																								$= 0$
9		-1																							$= 0$
10			-1																						$= 0$
11																									$\leq 0$
12																									$\leq 0$
13																									$\leq 0$
14																									$\leq 0$
15																									$\leq 0$
16																									$\leq 0$
17																									$= 0$
18																									$= 0$
19																									$= 0$

Номер строки	Схема использования флота условного типа			Варианты использования судов в конечном периоде						Базовая схема использования флота			Варианты использования судов при выводе из эксплуатации						Варианты рейсов ввода на линии работы						
	$X_1$	$X_{\alpha}$	$X_i$	$X_{111}^{11}$	$X_{11k}^{11}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{111}$	$X_{jk}$	$X_k$	$X_{111}^{11}$	$X_{111}^{11}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{111}^{11}$	$X_{111}^{11}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	
20																									
21																									
22																									
23																									
24																									
25																									
26																									
27																									
28																									
29													$P_{111}^{11}$												
30														$P_{111}^{11}$											
31															$P_{11k}^{1j}$										
32																$P_{11k}^{1j}$									
33																	$P_{11k}^{1j}$								
34																		$P_{11k}^{1j}$							
35									1	...		-1	-1												
36										1				-1	-1										
37										...	1					-1	-1								
38																									
39																									

Номер строки	Наличие флота в конечном периоде			Варианты рейсов вывода судов из эксплуатации						Варианты суток вывода судов из эксплуатации									Столбец свободных членов						
	$X_1^{11}$	$X_{\alpha}^{1j}$	$X_{\alpha}^{1j}$	$X_{111}^{11}$	$X_{111}^{11}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{11k}^{1j}$	$X_{111}^{11}$	$X_{111}^{11a}$	$X_{111}^{11b}$	$X_{11k}^{1j1}$	$X_{11k}^{1j2}$	$X_{11k}^{1j3}$	$X_{11k}^{1j4}$	$X_{11k}^{1j5}$	$X_{11k}^{1j6}$		$X_{11k}^{1j7}$					
20	-1			1	1																			= 0	
21		-1				1	1																		= 0
22			-1					1	1																= 0
23				-1	...					1	1	1													= 0
24					-1	...							...	...	...										= 0
25						...	-1						...	1	1	1	...								= 0
26							...	-1						...	...	...									= 0
27								...	-1					...	...	...									= 0
28								...	-1						...	1	1	1							= 0
29										$P_{111}^{11a}$	$P_{111}^{11a}$	$P_{111}^{11b}$													$\leq 0$
30													...	...	...										$\leq 0$
31												...	$P_{11k}^{1j1}$	$P_{11k}^{1j2}$	$P_{11k}^{1j3}$	...								$\leq 0$	
32													...	...	...										$\leq 0$
33													...	...	...										$\leq 0$
34															...	$P_{11k}^{1j4}$	$P_{11k}^{1j5}$	$P_{11k}^{1j6}$							$\leq 0$
35																									= 0
36																									= 0
37																									= 0
38						1	1	1																	= $f_{jk}$
39								1	1	1															= $f_{jk}$



ЭММ была апробирована на примере работы в конечный период навигации и вывода из эксплуатации флота в три базы зимнего отстоя.

Задача решалась в среде приложения Microsoft Office Excel с применением функции «Поиск решения».

Получение оптимального решения свидетельствует о том, что цель, поставленная при формализации задачи обоснования плана использования флота в конечный период навигации, в составе разработанной ЭММ успешно реализуется.

ЭММ оптимизации плана работы флота в конечный период навигации предоставляет возможность, кроме получения оптимального плана использования флота в данном периоде, составлять обоснованный план вывода судов из эксплуатации на базы зимнего отстоя.

#### **Список литературы:**

1. Альпидовский, А.Д. Экономико-математические модели оптимизации транспортного процесса. Монография. Изд. ФГБОУ ВО «ВГУВТ», Н. Новгород, 2020. – 152 с. ISBN 978-5-90522-622-9.
2. Банди Б. Основы линейного программирования: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1989. - 176 с.: ил.
3. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов /Н.Ш. Кремер, БА. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2005. - 407 с.

### **ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZATION PLANNING THE OPERATION OF THE FLEET DURING THE FINAL NAVIGATION PERIOD**

Andrej D. Alpidovskij

*Annotation. The article presents an economic and mathematical model of optimization planning of the river fleet operation in the final navigation period and the simplex matrix of the model is presented.*

*Keywords: optimal the use of the fleet for the final navigation period, fleet decommissioning plan, integer programming problem, simplex matrix, Excel function «Solution Search».*