ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ВНУТРЕННИХ ВОДНЫХ ПУТЕЙ В БАССЕЙНАХ ВЕЛИКИХ РЕК
Труды конгресса «Великие реки» 2020
Выпуск 9, 2020 г.
ISBN 978-5-901722-67-1

УДК 517.9

Барабаш Никита Валентинович, аспирант кафедры математики
Волжский государственный университет водного транспорта
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5,
младший научный сотрудник кафедры Теории управления и динамики систем
Институт информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СИНГУЛЯРНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ АТТРАКТОРЫ НЕАВТОНОМНЫХ ДВУМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Аннотация. Рассмотрено неавтономное двумерное отображение, имеющее изменяющийся во времени хаотический аттрактор. Приведено определение нестационарного гиперболического аттрактора неавтономного отображения. С помощью метода систем сравнения и метода построения инвариантных конусов строго доказано существование нестационарного гиперболического аттрактора в рассматриваемом отображении.

Ключевые слова: нестационарный аттрактор, неавтономное отображение, гиперболичность, хаос

Рассмотрим неавтономное двумерного отображения типа Лурье [1,2]

$$F\colon \begin{array}{l} \bar{x} = x + y + ag(x) \qquad \equiv X(x,y), \\ \bar{y} = \lambda u(i)[y + bg(x)] \equiv Y(u,x,y), \end{array} \tag{1}$$

где a, b, λ – положительные параметры, $u(i) \in (0,1)$ – произвольная ограниченная функция дискретного времени $i \in \mathbb{Z}$, и $g(x)$ – кусочно-линейная функция вида

$$g(x) = \begin{cases} 2(x+1), & x < -0.5, \\ -2x, & |x| \le 0.5, \\ 2(x-1), & x > 0.5. \end{cases}$$

Определение [3]**.** Пусть $G\colon\{|x| \le x^*, |y| \le y^*,\ x^*, y^* = \mathrm{const}\}$ – инвариантная область отображения (1), $FG \subset G, \forall i \in \mathbb{Z}^+$. Предположим, что в каждой точке $(x_0, y_0) \in G$ определены подобные пары устойчивых и неустойчивых конусов K^s и K^u, соответственно. Обозначим линеаризацию отображения F в точке (x_0, y_0) как $L(x_0, y_0, i) = DF(x_0, y_0, u(i))$, где D –дифференциал по координатам. Пусть выполнены следующие условия. Оператор L (оператор L^{-1}) растягивает любой вектор $V_0^u(V_0^s$, соответственно), выпущенный из точки (x_0, y_0) и лежащий в неустойчивом конусе K^u (в устойчивом конусе K^s, соответственно) для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и дискретного времени $i \in \mathbb{Z}^+$. Тогда множество точек в G, на котором в итоге действует отображение F при неограниченно возрастающем времени i, называется нестационарным гиперболическим аттрактором.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия

$$0 < \lambda < \frac{1}{1+2b}, a^- < a < a^+,$$

где $a^- = \frac{1}{2} + \frac{\lambda b}{1-\lambda} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\lambda b}{1-\lambda}\right)^2}$, $a^+ = \frac{3 - \frac{2\lambda b}{1-b} + \sqrt{\left(\frac{2\lambda b}{1-b} - 1\right)\left(\frac{2\lambda b}{1-b} - 9\right)}}{4}$.

Тогда отображение (1) имеет нестационарный гиперболический аттрактор, локализованный в области G: $\{|x| < a + \frac{\lambda b}{1-\lambda} - \frac{1}{2}, |y| < \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$.

Доказательство. Согласно Определению, сначала необходимо доказать существование инвариантной области G (Шаг 1), и далее доказать существование инвариантных сжимающих и растягивающих конусов K^s и K^u (Шаг 2).

Шаг 1. Рассмотрим вспомогательное отображение $\tilde{F}$, полученное из отображения (1) заменой $g(x) \to \tilde{g}(x)$, где функция $\tilde{g}(x)$ имеет вид

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{3}{2}, \\ g(x), & |x| \le \frac{3}{2}, \\ 1, & x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Покажем, что $\tilde{F}G_y \subset G_y$, где G_y: $\{|y| < y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$. Данное утверждение эквивалентно неравенству

$$|\bar{y}| < |y| \text{ для } |y| > y^*, i \in \mathbb{Z}^+. \tag{2}$$

Тогда из второго уравнения отображения $\tilde{F}$ легко получить неравенства

$$|\bar{y}| \le \lambda |u(i) y| + \lambda b |\tilde{g}(x)| \le \lambda |y| + \lambda b < |y|.$$

Из неравенств следует, что условие (2) выполняется при $|y| \ge y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}$.

Далее, для отображения $\tilde{F}$, рассматриваемом в области G_y, найдём интервал G_x: $\{|x| < x^*, x^* = \mathrm{const}\}$ такой, что инвариантная область G: $\tilde{F}G \subset G$ примет вид G: $\{|x| < x^*, |y| < y^*\}$. Для этого введём две одномерные системы сравнения

$$\begin{aligned} \bar{x} &= X^+(x) \equiv x + a\tilde{g}(x) + y^*, \\ \bar{x} &= X^-(x) \equiv x + a\tilde{g}(x) - y^*, \end{aligned} \tag{3}$$

удовлетворяющие неравенству $X^-(x) < \tilde{X}(x, y) \le X^+(x)$. Это неравенство означает, что для любых значений $y \in G_y, i \in \mathbb{Z}^+, x \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ образ $(\bar{x}, \bar{y})$ отображения $\tilde{F}$ принадлежит области $\bar{x} \in [X^-(x), X^+(x)], \bar{y} \in G_y$. Отсюда получим, что интервал G_x существует, если выполняются неравенства

$$X^-\left(\frac{1}{2}\right) \ge x_l^-, \quad X^+\left(-\frac{1}{2}\right) \le x_r^+, \tag{4}$$

где x_l^- и x_r^+ - крайние (левая и правая, соответственно) неустойчивые неподвижные точки отображений X^- и X^+, соответственно. Подставляя выражения для их координат, а также выражение для y^* в (4), с учётом (3), получаем условие существование инвариантной области G

$$a^2 + \left(\frac{\lambda b}{1-\lambda} - \frac{3}{2}\right) a + \frac{\lambda b}{2(1-\lambda)} \leq 0.$$

Это условие верно в интервале $a_1 < a < a_2$, где $a_{1,2} = \frac{1}{4}\left(3 - 2y^* \mp \sqrt{(2y^* - 1)(2y^* - 9)}\right)$, и выполняется для значений $\lambda < \frac{1}{1+2b}$. Следовательно, отображение $\tilde{F}$ имеет инвариантную область G: $\left\{|x| < x^* = a + \frac{\lambda b}{1-\lambda} - \frac{1}{2}, |y| < y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}\right\}$.

Поскольку отображения F и $\tilde{F}$ совпадают в области $|x| < \frac{3}{2}$, содержащей инвариантную область G, то G является инвариантной областью исходного отображения F [формула (1)].

Шаг 2. Рассмотрим вопрос о гиперболичности отображения F.

Уравнения в вариациях для любой неблуждающей траектории в области G записывается в виде

$$T: \quad \begin{aligned} \bar{\xi} &= p\xi + \eta, \\ \bar{\eta} &= \lambda u(i)(q\xi + \eta), \end{aligned}$$

где $p = 1 + ag'_x(x), q = bg'_x(x)$. Следовательно, оператор L из Определения есть матрица $L = \begin{pmatrix} p & 1 \\ \lambda u(i)q & \lambda u(i) \end{pmatrix}$. Введём неустойчивый конус $K^u = \{\xi, \eta \mid \eta = \alpha\xi, |\alpha| < \chi\}$. Обозначим образующую конуса за $l: \eta = \alpha\xi$. Образ линии $\bar{l} = Tl$ легко получить в параметрической форме $\bar{\xi} = (p + \alpha)\xi,\ \bar{\eta} = \lambda u(i)(q + \alpha)\xi$, откуда следует уравнение $\bar{l} = \bar{\alpha}\bar{\xi}$, где

$$\bar{\alpha} = \frac{\lambda u(i)(q+\alpha)}{p+\alpha}. \tag{5}$$

Конус K^u является инвариантным при выполнении условия

$$|\bar{\alpha}| < |\alpha| \text{ при } |\alpha| \geq \chi, \tag{6}$$

из которого следует, что отображение (5) имеет инвариантную область $|\alpha| < \chi$. Из (24) легко получить неравенства

$$|\bar{\alpha}| \leq \left|\frac{\lambda u(i)q}{p+\alpha}\right| + \left|\frac{\lambda u(i)}{p+\alpha}\right| |\alpha| < 2\lambda b + \lambda|\alpha|, \tag{7}$$

справедливые при условии $|p + \alpha| > 1$. Из (7) получаем, что условие (6) верно при $|\alpha| \geq \frac{2\lambda b}{1-\lambda}$, т.е. для $\chi = \frac{2\lambda b}{1-\lambda}$. Таким образом, оператор L переводит вектор $V_0^u(\xi, \eta) \in K^u$ в вектор $V_1^u(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in K^u$.

Достаточное условие растяжения вектора может быть записано в виде $|p + \alpha| > \sqrt{1 + \chi^2}$, и справедливо в области $a > a^- = \frac{1+\chi+\sqrt{1+\chi^2}}{2}$.

Доказательство существования сживающего инвариантного конуса K^s проводится аналогично. □

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 19-12-00367).

Список литературы:

1. Белых, В.Н., Барабаш, Н.В., Урусова, Н.А., Мордвинкина И.А. Аттракторы конкретных отображений с переменной структурой: пример гиперхаоса // Великие реки 2019: Материалы международной научно-методической конференции. ФГБОУ ВО «ВГУВТ». 2019. – Режим доступа: http://вф-река-море.рф/
2. Белых, В.Н., Гречко, Д.А. Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра // Динамические Системы – 2018. – Т. 8. - №. 4. С. 373-383.
3. Barabash, N.V., Belykh, V.N. Chaotic driven maps: Non-stationary hyperbolic attractor and hyperchaos // The European Physical Journal Special Topics. – 2020. – Vol. 229. –№. 6-7. – pp. 1071–1081.

NON-STATIONARY SINGULAR-HYPERBOLIC ATTRACTORS OF NON-AUTONOMOUS 2D MAPS

Nikita V. Barabash

A non-autonomous two-dimensional map with a chaotic attractor varying in time is considered. The definition of a non-stationary hyperbolic attractor of non-autonomous map is given. Using the auxiliary systems approach and the method of constructing invariant cones, the existence of a non-stationary hyperbolic attractor in the map under consideration is rigorously proved.

Keywords: non-stationary attractor, non-autonomous map, hyperbolicity, chaos.