ISBN 978-5-901722-67-1

УДК 517.9

Белых Владимир Николаевич, профессор, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», главный научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского.
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5; 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Барабаш Никита Валентинович, аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», младший научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского.
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5; 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ АТТРАКТОРЫ В МИГАЮЩИХ СИСТЕМАХ ЛОРЕНЦА И ХИНДМАРШ-РОУЗ

Аннотация. В работе рассматриваются мигающие системы, т.е. неавтономные динамические системы, образованные случайным переключением между несколькими автономными подсистемами ОДУ на каждом последовательном интервале времени. Приводится определение аттрактора-призрака. Для мигающих систем, образованных от известных моделей Лоренца и Хиндмарш-Роуз, приводятся значения параметров, при которых их нестационарные аттракторы лежат в малых окрестностях аттракторов-призраков.

Ключевые слова: мигающая система, случайный процесс, усреднение, аттрактор-призрак, аттрактор Лоренца, модель нейрона, хаос.

1. Рассматриваются мигающие системы вида [1-3]

$$\dot{x} = F(x, s(t)), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $s(t)$ – случайная дискретная скалярная величина, принимающая значение $s_i, i = 1,2,\dots,M$, с вероятностью p_i на каждом -ом интервале времени $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, где $\tau = \text{const}$ – период переключения. Траектории системы (1) склеены в момент времени $t = k\tau$ из траекторий M автономных систем

$$\dot{x} = F(x, s_i),\ i = 1,2,\dots,M, \tag{2}$$

заданных в каждый момент времени $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$ с вероятностью p_i. Предположим, что каждая из систем (2) имеет аттрактор A_i.

При достаточно быстрых переключениях ($\tau \ll 1$) правая часть системы (1) может быть заменена её ожиданием [2, 3]

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{M} p_i F_i(x, s_i), \tag{3}$$

откуда следует, что аттрактор $\mathcal{A}$ усреднённой системы (3) служит аппроксимацией динамики мигающей системы (1) при достаточно быстром мигании. Если аттрактор $\mathcal{A}$ отсутствует среди аттракторов A_i автономных систем (2), то его называют аттрактором-призраком [4-7].

2. Рассмотрим мигающую систему Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(t)(y - x), \\ \dot{y} &= (r(t) - z)x - y, \\ \dot{z} &= xy - \tfrac{8}{3}z, \end{aligned} \tag{4}$$

с зависящими от времени параметрами $r(t) = (r_1 - r_2)s(t) + r_2$, $\sigma(t) = (\sigma_1 - \sigma_2)s(t) + \sigma_2$, где $s(t)$ - случайный параметр, принимающий значения

$$s(t) = \begin{cases} 1, \text{с вероятностью } p_1 \\ 0, \text{с вероятностью } p_2 = 1 - p_1, \end{cases} \tag{5}$$

на каждом интервале времени $t \in \big[k\tau, (k+1)\big), k \in \mathbb{Z}^+$. Таким образом, мигающая система L образована случайным переключением между двумя автономными системами $L_1(r_1, \sigma_1)$ [при $s(t) = 1$] и $L_1(r_2, \sigma_2)$ [при $s(t) = 0$], являющимися оригинальными хорошо известными системами Лоренца [8, 9].

Выберем параметры $r_1 = 15$, $\sigma_1 = 23$, $r_2 = 36$, $\sigma_2 = 2$ из области, где притягивающее множество систем $L_{1,2}$ образовано сосуществующими устойчивыми фокусами, а нетривиальное инвариантное предельное множество отсутствует.

Утверждение 1. Пусть системы L_1 и L_2 имеют вероятности включения $p_1 = \frac{8}{21}$ и $p_2 = \frac{13}{21}$, соответственно. Тогда странный аттрактор Лоренца $\mathcal{A}$ является аттрактором-призраком мигающей системы (4), а её нестационарный аттрактор при достаточно быстрых переключениях лежит в малой окрестности $\mathcal{A}$.

Доказательство. В силу метода усреднения (1)-(3), при достаточно быстром мигании $\tau \ll 1$ неавтономную систему (4) можно заменить её усреднённой автономной моделью Лоренца с параметрами $r_a = p_1 r_1 + p_2 r_2$=28, $\sigma_a = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 = 10$, для которых существование странного аттрактора Лоренца было численно установлено с помощью методов интервальной арифметики [10]. Поскольку системы $L_{1,2}$ имеют только устойчивые фокусы, странный аттрактор Лоренца $\mathcal{A}$ является аттрактором-призраком мигающей системы (4). □

3. Рассмотрим мигающую систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - x^3 + y - z + I(t), \\ \dot{y} = 1 - 5x^2 - y, \\ \dot{z} = 0.01(4(x + 1.6) - z), \end{cases} \tag{6}$$

образованную от оригинальной модели Хиндмарш-Роуз [11] заменой постоянного внешнего стимула $I = \text{const}$ на случайную переключающую последовательность $I(t) = (I_1 - I_2)s(t) + I_2$, где $s(t)$ – случайный параметр (5).

Система (6) при $I = \text{const}$ в зависимости от параметра I моделирует различное типы нейронной активности, включая спокойствие, регулярную и хаотическую тоническую и пачечную активности. В фазовом пространстве системы им отвечают устойчивые состояния равновесия, однообходные и многообходные устойчивые предельные циклы и хаотические аттракторы.

Выберем параметры $I_1 = 1.6$, $I_2 = 3.75$ из области, в которой образующие системы $HR_1(I_1)$ и $HR_2(I_2)$ имеют глобально устойчивый однообходный предельный цикл [11], соответствующий тонической активности.

Утверждение 2. Пусть системы HR_1 и HR_2 имеют вероятности включения $p_1 = 0.44$ и $p_2 = 0.56$, соответственно. Тогда глобально устойчивый трёхобходный предельный цикл $\mathcal{A}$ является аттрактором-призраком мигающей системы (6), а её нестационарный аттрактор при достаточно быстрых переключениях лежит в малой окрестности $\mathcal{A}$.

Доказательство. Аналогично доказательству Утверждения 1, при усреднении мигающей системы (6) для достаточно малых интервалов переключения $\tau \ll 1$ получим автономную систему Хиндмарш-Роуз с параметром $I_a = p_1 I_1 + p_2 I_2 = 2.804$, имеющую глобально устойчивый трёхобходный предельный цикл $\mathcal{A}$ [11]. Поскольку мигания происходят между системами с глобально устойчивыми однообходными циклами, то согласно Определению $\mathcal{A}$ является аттрактором-призраком. □

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 19-72-10128).

Список литературы:

1. Barabash, N.V., Belykh, V.N. Synchronization thresholds in an ensemble of Kuramoto phase oscillators with randomly blinking couplings. Radiophysics and Quantum Electronics. – 2018. – Vol. 60. – №. 9. – pp. 761–768.
2. Belykh, I., Belykh, V., and Hasler, M. Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling // Physica D. – 2004. – Vol. 195. – №. 1-2. – pp. 188–306.
3. Hasler, M., Belykh, V., and Belykh. I. Dynamics of stochastically blinking systems. Part I: Finite time properties // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. – 2013. – Vol. 12. – №. 2. – pp. 1007–1030.
4. Hasler, M., Belykh, V., and Belykh. I. Dynamics of stochastically blinking systems. Part II: Asymptotic properties // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. – 2013. – Vol. 12. – №. 2. – pp. 1031–1084.
5. Belykh, I., Belykh, V., Jeter, R. et al. Multistable randomly switching oscillators: The odds of meeting a ghost // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2013. – Vol. 222. – №. 10. – pp. 2497–2507.
6. Белых, В.Н., Барабаш, Н.В. Аттрактор-призрак в случайно мигающей фазовой системе // Великие реки 2018: Материалы международной научно-методической конференции. ФГБОУ ВО «ВГУВТ». 2018. – Режим доступа: http://вф-река-море.рф/
7. Barabash, N.V., Belykh, V.N. Non-stationary attractors in the blinking systems: ghost attractor of Lorenz type // Cybernetics and Physics. – 2019. – Vol. 8. –№. 4. – pp. 209–214.
8. Lorenz, E.N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of the atmospheric sciences. – 1963. – Vol. 20. – №. 2. – pp. 130-141.
9. Bykov, V.V., Shilnikov, A.L. On the boundaries of the domain of existence of the Lorenz attractor // Methods of Qualitative Theory and Theory of Bifurcations. Gorky State University, Gorky. – 1989. – pp. 151-159.
10. Tucker, W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. – 1999. – Vol. 328. – №. 12. – pp. 1197-1202.
11. Storace, M., Linaro, D., de Lange, E. The Hindmarsh–Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2008. – Vol. 18. – №. 3. – pp. 033128.

NON-STATIONARY ATTRACTORS IN BLINKING LORENZ AND HINDMARSH-ROSE SYSTEMS

Vladimir N. Belykh, Nikita V. Barabash

The paper considers blinking systems, i.e. non-autonomous dynamical systems formed by random switching between several autonomous ODE subsystems at each sequential fixed period of time. The definition of a ghost attractor is given. For blinking systems formed from the well-known Lorenz and Hindmarsh-Rose models, the values of the parameters are given for which their non-stationary attractors lie in small vicinities of ghost attractors.

Keywords: blinking system, random process, averaging, ghost attractor, Lorenz attractor, neuron model, chaos.