ISBN 978-5-901722-67-1

УДК 517.925/926

**Белых Владимир Николаевич**, профессор, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», главный научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского.
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5; 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

**Барабаш Никита Валентинович**, аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», младший научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского.
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5; 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

**Гречко Дина Алексеевна**, аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ».
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

**Мордвинкина Ирина Александровна**, старший преподаватель кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ».
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

# НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА МНОГОМЕРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЭНО

*Аннотация. В работе рассматривается многомерное отображение с одной нелинейностью. Приведена замена переменных и параметров, с помощью которой отображение приводится к обобщенному многомерному отображению типа Эно. С помощью метода систем сравнения получены достаточные условия существования аттрактора, выраженные явно в параметрах системы. В явном виде выписаны границы инвариантной области, содержащей аттрактор.*

*Ключевые слова: многомерное отображение, отображение Эно, аттрактор, инвариантная область, метод систем сравнения.*

Рассмотрим многомерное отображение вида [1]

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x) + \mathbf{1}y \triangleq g(x,y), \\ \bar{y} &= \mathbf{b}x + Ay \triangleq L(x,y), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^1, y = \mathrm{column}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{1}$ – единичный вектор размерности $n$, $f(x)$ – непрерывная гладкая функция, $\mathbf{b} = \mathrm{column}(b, 0, 0, \ldots, 0)$, $b$ – параметр, $A = [a_{ij}]_n^n$ – нормированная $(n \times n)$-матрица нижнего сдвига с элементами $a_{ij} = a_j \delta_{i,j+1}$, где $a_j$ – параметры, и $\delta_{i,j+1}$ – символ Кронекера. Параметры удовлетворяют условиям

$$|b| < 1, \ \ |a_i| < a < 1, \ \ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

С помощью замены переменных $y_i = a_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$, и параметров $b = q_1, a_i = \frac{q_{i+1}}{q_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, отображение (1) можно представить в виде обобщённого отображения типа Эно [2]

$$\bar{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{n} q_j v_j\,,$$
$$\bar{v}_1 = x,$$
$$\bar{v}_{i+1} = v_i,\;\; i = 1, \dots, n-1.$$

Рассмотрим область $D = D_x \times D_y$, где $D_x = \{\alpha^- < x < \alpha^+\}$, $D_y = \{\|y\| < \gamma\}$, $\alpha^\pm$, $\gamma > 0$ – некоторые постоянные, а оператор $\|\cdot\|$ обозначает манхэттенское расстояние.

Приведём без доказательства следующую лемму.

**Лемма 1.** Пусть $x$ принадлежит интервалу $D_x = \{\alpha^- < x < \alpha^+\}$ и параметр $\gamma$, определяющий область $D_y$, равен $\gamma = \frac{\alpha|b|}{1-a}$. Тогда отображение $LD_y \subset D_y$, т.е. отображение $\bar{y} = L(x, y)$ в (1), диссипативно, а область $D_y$ служит инвариантной областью отображения $L$.

Рассмотрим две вспомогательные одномерные системы сравнения [3,4]
$$\bar{x} = f(x) + \gamma \triangleq g^+(x),$$
$$\bar{x} = f(x) - \gamma \triangleq g^-(x).$$

**Утверждение 1.** Образ $(\bar{x}, \bar{y})$ любой точки $(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in D_y$, удовлетворяет условию $\bar{x} \in \left(g^-(x), g^+(x)\right)$, $\bar{y} \in D_y$.

**Доказательство.** Согласно Лемме 1, $\bar{y} \in D_y$ для любого $y \in D_y$. Тогда очевидное неравенство $g^-(x) < g(x, y) < g^+(x)$, справедливое для любого $y \in D_y$, доказывает утверждение.

□

Чтобы получить достаточные условия существования инвариантной области $D$, $HD \subset D$, содержащей аттрактор отображения (1), выберем некоторый интервал $D_x = (\alpha^-, \alpha^+)$ и обозначим крайние значения функции $f(x)$ на этом интервале как
$$\bar{x}^- = \inf_{x \in D_x} f(x)\,,$$
$$\bar{x}^+ = \sup_{x \in D_x} f(x)\,.$$

**Лемма 2.** 1) Для любого $y \in D_y$ образ интервала $D_x$ лежит в интервале $I = (\bar{x}^- - \gamma, \bar{x}^+ + \gamma)$, $gD_x \subset I$. 2) Пусть выполняются условия
$$g^-(\bar{x}^- - \gamma) > \bar{x}^- - \gamma, \qquad g^+(\bar{x}^+ + \gamma) < \bar{x}^+ + \gamma.$$
Тогда для любого $y \in D_y$ интервал $I$ является инвариантным относительно отображения $g(x, y)$, $gI \subset I$.

**Доказательство.** 1) Из Утверждения 1 следует, что граничные точки образа интервала $D_x$ есть крайние точки функций $g^\pm$, определяющие интервал $I$. 2) Из условий Леммы 2 напрямую следует, что $gI \subset I$.

□

**Лемма 3.** Предположим, что
$$\alpha^- = \bar{x}^- - \gamma,$$
$$\alpha^+ = \bar{x}^+ + \gamma.$$
Тогда при выполнении условия Леммы 2 интервал $D_x = \{\alpha^- < x < \alpha^+\}$ является инвариантным, $gD_x \subset D_x$, и параметр $\gamma$ удовлетворяет условию
$$\gamma \leq \frac{\max\{|\bar{x}^-|, |\bar{x}^+|\}\,|b|}{1 - a - |b|}.$$

**Доказательство.** Инвариантность интервала $D_x$ непосредственно следует из Леммы 2. Формула для $\gamma$, которая зависит теперь только от параметров отображения (1), следует из следующей оценки $\gamma$ из Леммы 1
$$\gamma \leq \frac{(\max\{|\bar{x}^-|, |\bar{x}^+|\} + \gamma)|b|}{1 - a}.$$

□

Напомним, что если $HD \subset D$, то существует замкнутое инвариантное множество $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} H^k D$, называемое аттрактором отображения $H$.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия Лемм 1 и 3. Тогда область $D = D_x \times D_y$ есть инвариантная область отображения (1), $HD \subset D$, содержащая аттрактор $A \in D$, $HA = A$.

**Доказательство.** Из Леммы 1 следует, что образ $\bar{y}$ не покидает $D_y$ для любого $x$. Лемма 3 говорит, что $x$ не покидает интервал $D_x$ для любого $y \in D_y$. Таким образом, $HD \subset D$, и, следовательно существует аттрактор $A \subset D$, $HA = A$.□

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект No. 0729-2020-0036).

**Список литературы:**

1. Белых, В.Н., Гречко, Д.А. Локализация аттрактора и рождения подковы Смейла в многомерном отображении типа Эно // Великие реки 2019: Материалы международной научно-методической конференции. ФГБОУ ВО «ВГУВТ». 2019. – Режим доступа: http://вф-река-море.рф/
2. Gonchenko, S.V., Ovsyannikov, I.I., Simó, C., and Turaev, D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos– 2005. – Vol. 15. – №. 11. – pp. 3493-3508.
3. Белых, В.Н., Гречко, Д.А. Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра // Динамические Системы – 2018. – Т. 8. - №. 4. С. 373-383.
4. Barabash, N.V., Belykh, V.N. Chaotic driven maps: Non-stationary hyperbolic attractor and hyperchaos // The European Physical Journal Special Topics. – 2020. – Vol. 229. –№. 6-7. – pp. 1071–1081.

## A NEW LOOK AT THE MULTIDIMENSIONAL HÉNON MAP

Vladimir N. Belykh, Nikita V. Barabash, Dina A. Grechko, Irina A. Mordvinkina

*The paper considers multidimensional mapping with one nonlinearity. We derive a replacement of variables and parameters which allows to reduce the map to a generalized multidimensional map of the Hénon type. Using the auxiliary systems approach, we obtained sufficient conditions for the existence of an attractor, expressed explicitly in the parameters of the system. The boundaries of the invariant domain containing the attractor are written in explicit form.*

*Keywords: multidimensional map, Hénon map, attractor, invariant domain, auxiliary systems approach.*