ПРОБЛЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ ВНУТРЕННИХ ВОДНЫХ ПУТЕЙ В БАССЕЙНАХ ВЕЛИКИХ РЕК
Труды конгресса «Великие реки» 2020
Выпуск 9, 2020 г.
ISBN 978-5-901722-67-1

УДК 517.925/926

Гречко Дина Алексеевна, аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ»
Волжский государственный университет водного транспорта
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МНОГОМЕРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Аннотация. В работе рассматривается многомерное отображение с переодической нелинейностью. Определены критерии, определяющие колебательный и вращательный тип аттракторов. Доказана теорема, указывающая область параметров, при которых аттракторы как колебательные, так и вращательные, являются сингулярно-гиперболическими.

Ключевые слова: многомерное отображение, динамическая система, аттрактор, сингулярно-гиперболический аттрактор, гиперболичность, диссипативность.

Известно, что в пространстве динамических систем с дискретным временем (отображений) существует открытая область, соответствующая отображениям с гиперболическими свойствами [1, 2, 3].

Существует класс модельных систем, имеющих структурно неустойчивые аттракторы типа Лоренца, которые обычно называют сингулярно гиперболическими [4]. Аттракторы такого типа для многомерных обратимых отображений с особенностями, аналогичные двумерным отображениям Лози и Белых [5, 6, 7], изучаются в данной работе.

Рассматривается многомерное отображение с периодической нелинейностью (система типа Лурье) $F: R^{n+1} \to R^{n+1}$ с нормальной формой общего вида:

$$(x, y_i) \to \left(x + \delta - ag(x) + \sum_{i-1}^{n} y_i\,, \qquad \lambda_i(-b_i g(x) + y_i) \right), i = \overline{1, n} \qquad (1)$$

Где $x \in S^1, y \in R^n, g(x) = g(x + 2\pi), a, \delta, \lambda_i, b_i$ - параметры, $|g'(x)| > h$. Разобьем неблуждающие траектории на колебательный и вращательный тип через число вращения $r = \lim_{i \to \infty} \frac{x_i}{2\pi i}$.

Такие отображения возникают в задачах хаотической динамики [8] и служат математической моделью дискретной системы фазовой автоподстройки частоты с цифровым фильтром высокого порядка [9].

Доказано существование поглощающей области D, содержащей аттракторы F. А именно, следующее утверждение верно.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $0 < \lambda_i < \lambda^* < 1,\ i = \overline{1, n}$. Тогда полноторий $D = \{\|y\| < A, x \in S^1\}$ является поглощающей областью D, т.е. $FD \subset D$.

Чтобы найти аттракторы отображения F, введены два вспомогательных одномерных отображения окружности $F^{\pm}: x \to x + \delta - ag(x) \pm \gamma$ и доказана следующая

<u>Теорема 2.</u> 1. Если оба отображения F^+ и F^- имеют только колебательные аттракторы, то отображение F имеет только колебательный аттрактор.

2. Если оба отображения F^+ и F^- имеют только вращательные аттракторы, то отображение F также имеет только вращающийся аттрактор.

Мы изучили гиперболические свойства аттракторов отображения F, из которых следует, что в каждой точке аттрактора существует неустойчивый (устойчивый) конус, инвариантный относительно F (F^{-1} соответственно), обладающий в нем свойством локального растяжения (сжатия). Для этого рассмотрено уравнение в вариациях вдоль траекторий аттракторов $(\xi, \eta_i) \to \left((1 - ag')\xi + \sum \eta_i\,, \lambda_i(-bg'\xi + \eta_i)\right), i = 1, n.$

Вводя неустойчивый конус $K^u = \{\xi, \eta_i \mid \eta_i = \alpha_i \xi, |\alpha_i| < \chi, i = 1, n\}$, получаем условие, когда отображение $\xi \to \bar{\xi}$ внутри конуса является растягивающим. Найдя условие для значения $\chi \leq \chi^*$, где $\chi^* = \frac{\min_{0 \leq i \leq n} \lambda_i b}{1 - \min_{0 \leq i \leq n} \lambda_i}$, определяющего конус K^u, доказана основная

<u>Теорема 3.</u> Каждый аттрактор (колебательный или вращательный) отображения F является сингулярно-гиперболическим в области параметров $ah > 2 + \chi^* n + \varepsilon, \varepsilon > 0$.

В конце отметим, что для этой явно заданной области параметров, зависящей от того, является ли аттрактор колебательным или вращательным, аттрактор является гиперболическим. При этих условиях динамическое поведение траекторий отображения представляет собой пример динамического хаоса.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда по гранту № 19-12-00367.

Список литературы:

1. Anosov, D.V. Some smooth dynamical systems /J. Sinai, // UMN, - 1967, - v.22 №5, - 107-172.
2. Arnold, V. I. Theory of Bifurcations. / V. S., Afraimovich, Y. S., Ilyashenko, L.P., Shilnikov. // Dynamical Systems. Encyclopedia of Mathematical Sciences. – 1986 - . v. 5 - pp.5-218.
3. Белых В. Н. СТРАННЫЙ АТТРАКТОР // Большая российская энциклопедия. - Том 31., - 2016, - стр. 285-286
4. Sataev, E. Invariant measures for hyperbolic maps with singularities /Sataev, E // UMN – 1992 – v.47 №1 - 147-204.
5. Lozi, R. Un attracteur de Henon / R., Lozy // J. Physique – 1978 – v.39 - 9-10.
6. Belykh, V.N. Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map / V.N., Belykh // Matematicheski Sbornik – 1995 – v.186 №3 - 3-18.
7. Belykh, V.N. Hyperbolic attractor of a continuous piecewise smooth 2-dimensional map / B. Ukrainsky // Sbornik Nauchnyh Trudov ”Modelirovanie i optimizacia slozhnyh system”: N. Novgorod, VGAVT – 1997 – v.273 - 137.
8. Заславский, Г.М. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний / Чириков Б.В. // УФН - 1971. -Т. 105, вып. 1. – 3-39.
9. Белых В.Н. Модели дискретных СФС и их исследование / В кн. Системы фазовой синхронизации [Под ред В.В.Шахгильдяна, Л.Н.Белюстиной]. – М.: Радио и связь, 1982 – С. 161-162.
10. Belykh V.N., Multidimensional Lurie systems and Henon maps: Smale’s horseshoes and bifurcations. / Mordvinkina I.A. and Ukrainsky B.S. // Тезисы докладов Международной конференции «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» посвященной памяти Л.П. Шильникова (1934–2011). Нижний Новгород, Россия, 1–5 июля 2013.
11. Belykh V., Hyperbolic attractors in a family of multidimensional maps with cusp-points. / Komrakov N., Ukrainsky B. // Proc. of int. conf. "Progress in nonlinear science" dedicated to the 100-th anniversary of A. Andronov. Nizhny Novgorod. - 2001. - 31–38 .
12. Белых, В.Н. Хаотические и странные аттракторы двумерного отображения // Математический сборник. – 1995. – том 186, выпуск № 3 – С. 3 – 18.
13. Белых, В.Н. Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 1, – С. 115 – 121.

CHAOTIC DYNAMICS OF MULTIDIMENSIONAL MAP WITH PERIODIC NONLINEAR FUNCTION

Dina A. Grechko

The paper considers a multidimensional mapping with periodic nonlinear function. The conditions determining the oscillatory and rotational types of attractors are determined. The theorem is proved on the domain of parameters for which attractors, both oscillating and rotating, are singular-hyperbolic.

Keywords: multidimensional map, dynamical system, attractor, singular-hyperbolic attractor, hyperbolicity, dissipativity.