



УДК 517.925/926

**Киняпина Марина Сергеевна**, старший преподаватель,  
Волжский государственный университет водного транспорта  
603951, г. Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

### ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ И ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*Аннотация.* В работе приводятся результаты качественно-численного моделирования нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка, показано существование бесконечного множества бифуркаций гомоклинических и гетероклинических орбит.

*Ключевые слова:* бифуркация, гомоклиническая и гетероклиническая орбиты, хаотическое множество траекторий

В работе проводится качественно-численное исследование системы (1)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2 \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) приводится к известной и изученной системе Лоренца записанной в специальном виде [1] при  $a_{11} = a_{12}$ ,  $a_{21} > 0$ ,  $a_{22} = 1$ , или к система Чена [2] при значениях параметров  $a_{11} = a_{12} > 0$ ,  $a_{22} < 0$ ,  $a_{21} = \text{tr}A < 0$ . Топологическая структура, бифуркации и стохастичность аттрактора Лоренца строго определены и изучены [3,4]. Система (1) является частным случаем более общей системы (2), рассмотренной в [5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y + \lambda p(x, y, z) \equiv P \\ \dot{y} = -H_x + \lambda q(x, y, z) \equiv Q \\ \dot{z} = f(z) + \alpha r(x, y) \equiv R \end{cases} \quad (2)$$

Для системы (2) выполняется условие: семейство кривых постоянного гамильтониана  $H(x, y, z) = C$  содержит гомоклиническую восьмерку при некотором значении  $C = C_1$ . В случае  $H(x, y, z) = C_1$ ,  $r(x, y) = \frac{x^2}{2}$ ,  $p = 0$ ,  $q = -y$ ,  $f = -kz$  справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1.** В четвертом квадрате плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  существует примыкающая к нулю бифуркационная кривая, которая в зависимости от остальных параметров соответствует бифуркации либо двух симметричных гомоклинических орбит седлового состояния равновесия, либо двух гетероклинических орбит, соединяющих седловое состояние равновесия с седловым циклом.

Система (1) имеет пятимерное пространство параметров  $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b)$ .

Предположим, что матрица  $A = \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$  и параметр  $b$  удовлетворяют условиям:

$\Delta = -\det A > 0$ ,  $\sigma = -\text{tr} A > 0$ ,  $a_{11} > 0$ ,  $b > 0$ , тогда система (1) обладает симметрией  $(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (-x_1, -x_2, x_3)$  и при  $\Delta = -\det A > 0$  имеет три состояния равновесия. Начало координат  $O_1(0,0,0)$  является седловой точкой с одномерным неустойчивым многообразием  $W_0^u$ . Существуют еще два симметричных состояния равновесия  $O_2, O_3$ , которые при  $\Delta = 0$  сливаются с  $O_2$ . При достаточно больших значениях параметра  $b$  система (1) имеет двумерное устойчивое интегральное многообразие. При  $\Delta = 0$  на двумерном многообразии система (1) имеет бифуркационную поверхность, соответствующую двум симметричным петлям, образованным  $W_0^u$ .

Доказано, что стандартный аттрактор Лоренца появляется в результате гетероклинической бифуркации, когда неустойчивое многообразие  $W_0^u$  попадает на устойчивые  $2d$ -многообразия двух симметричных седловых циклов, рожденных из «гомоклинической бабочки». Рождение этой «гомоклинической бабочки» приводит к появлению хаотического множества траекторий. Кроме того, в системе (1) существует бесконечное множество бифуркаций многообходных гомоклинических и гетероклинических орбит. Эти бифуркации приводят к изменению притягивающих предельных множеств.

Основной результат исследования системы (1) может быть сформулирован в виде следующего утверждения:

**Теорема 2.** Хаотическая компонента неблуждающего множества рождается в результате бифуркации двух гомоклинических орбит седлового состояния равновесия.

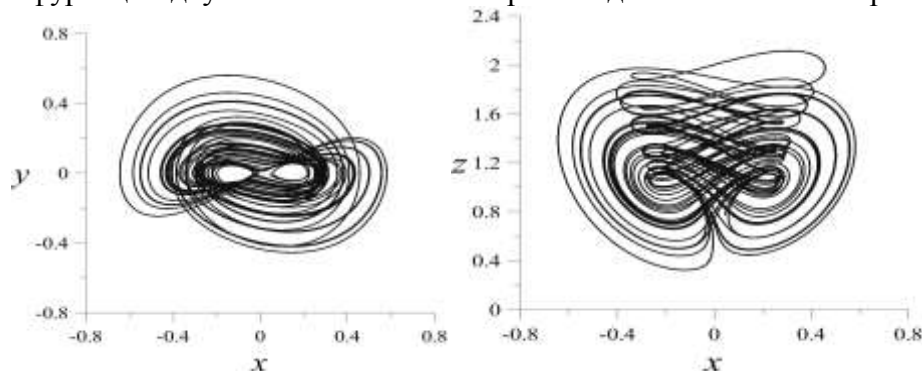


Рис. 1. Проекция фазовых траекторий системы (1).

Сформулированное утверждение является прямым следствием **Теоремы 1** для частного случая системы (1). На *Рис. 1*. представлены проекции фазовых траекторий системы (1) на плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$ . Расчеты проведены для значений параметров  $a_{11} = a_{12} = 35$ ,  $a_{21} = -7$ ,  $a_{22} = -28$ , и начальных условий  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 1$ .

### Список литературы:

1. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci., vol.20. – 1963– С.130-141.
2. G.Chen, T.Ueta Yet another chaotic attractor// Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 9(7). –1999. – С. 1465-1466.
3. Belykh V.N. Bifurcations of separatrices of a saddle point of the Lorenz system // Differential equations, vol.20(10). – 1984. – С. 1184-1191.
4. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P.,Turaev D.V. Normal forms and Lorenz attractors, Int.J. Bifurcation and Chaos, 3(5). – 1993. – С. 1123-1139.
5. Belykh V. N. Homoclinic and heteroclinic linkages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps //Translations of the American Mathematical Society-Series 2. – 2000. – Т. 200. – С.51-62.

# HOMOCLINIC AND HETEROCLINICAL ORBITS IN THE NONLINEAR THIRD ORDER SYSTEM

Marina S. Kinyapina

*The paper presents the results of qualitatively numerical simulation of a nonlinear system of third-order differential equations. The existence of an infinite number of bifurcations of homoclinic and heteroclinic orbits is shown.*

*Keywords: bifurcation, homoclinic and heteroclinic orbits, chaotic set of trajectories.*