

УДК 517.925/926

Белых Владимир Николаевич^{1,2}, профессор, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», главный научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского, e-mail: belykh@vsawt.com

Барабаш Никита Валентинович^{1,2}, ассистент кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», младший научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского, e-mail: barabash@itmm.unn.ru

Гречко Дина Алексеевна¹, аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», e-mail: d.grechko.18@gmail.com

¹Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.

²Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ ЛУРЬЕ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

Аннотация. Рассмотрен простой пример неавтономного отображения, имеющего различные хаотические аттракторы изменяющиеся во времени. Сформулировано определение нестационарного гиперболического аттрактора управляемых отображений. Строго доказана теорема существования нестационарного гиперболического аттрактора в двумерном управляемом отображении. Анализ основан на подходе вспомогательных систем и построении инвариантных конусов.

Ключевые слова: нестационарный аттрактор, неавтономное отображение, гиперболичность, бифуркация, хаос.

В работах [1-2] рассматривается класс систем Лурье (с одной нелинейностью) с дискретным временем, для которых были предложены нелокальные аналитические методы. Эти методы, основанные на существовании в системе инвариантных устойчивых и неустойчивых конусов [3-4] и доказывают существование гиперболического аттрактора.

Целью данного исследования является изучение частного случая притягивающего множества с гиперболическими свойствами, в работе используется следующее определение нестационарного гиперболического аттрактора.

Определение [1]. Пусть $G : (\|x\| \leq x^*, x^* = \text{const})$ будет поглощающая область отображения $F(x(i), u(i)), FG \subset G, \forall i \in Z^+$. Пусть в каждой точке $x_0 \in G$ определены одинаковые пары устойчивых и неустойчивых инвариантных конусов K^s и K^u . Обозначим линеаризацию отображения F в точке $x_0: L(x_0, i) = D_x F(x_0, u(i))$, где D_x является дифференциалом по x . Пусть выполняются следующие условия. Оператор L (оператор L^{-1}) расширяет любой вектор V_0^u (V_0^s , соответственно), выпущенный из x_0 и лежащий в неустойчивом конусе K^u (устойчивом конусе K^s , соответственно) для любого $x_0 \in G$ и $i \in Z^+$.

Тогда множество точек в G , на которых отображение $F(x(i), u(i))$ в итоге действует при неограниченном увеличении i , называется нестационарным гиперболическим аттрактором.

Рассмотрим условия существования нестационарного гиперболического аттрактора для следующего двумерного отображения типа Лурье

$$F: \begin{cases} x(i+1) = x(i) + y(i) + ag(x(i)) \equiv X(x, y), \\ y(i+1) = \lambda u(i) (y(i) + bg(x(i))) \equiv Y(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, λ - положительные параметры, а $g(x)$ - кусочно-линейная функция вида

$$g(x) = \begin{cases} 2 + 2x, & x < -\frac{1}{2}, \\ -2x, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ -2 + 2x, & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь мы определяем управляющий параметр $u(i)$ как произвольную ограниченную функцию $0 < u(i) < 1$.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия

$$0 < \lambda < \frac{1}{1+2b}, a^- < a < a^+, \quad (3)$$

где, $a^- = \frac{1 + \frac{2\lambda b}{1-\lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{2\lambda b}{1-\lambda}\right)^2}}{2}$; $a^+ = \frac{3 - \frac{2\lambda b}{1-\lambda} + \sqrt{\left(\frac{2\lambda b}{1-\lambda} - 1\right) \left(\frac{2\lambda b}{1-\lambda} - 9\right)}}{4}$

Тогда отображение (1) имеет нестационарный гиперболический аттрактор, локализованный в области $G: \{|x| < a + \frac{\lambda b}{1-\lambda} - 0.5, |y| < \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$.

Доказательство. Согласно определению 1 сначала необходимо доказать существование инвариантной области G (шаг 1), а затем - существование инвариантных устойчивых и неустойчивых конусов K^s и K^u со сжимающими и растягивающими свойствами (шаг 2).

Шаг 1. Суть данного шага состоит в том, чтобы получить инвариантную область G такой, что $\tilde{F}G \subset G$. Для этого мы рассмотрим вспомогательное отображение \tilde{F} , являющимся отображением F (формула (1)), где функция $g(x)$ заменяется функцией $\tilde{g}(x)$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{3}{2}, \\ g(x), & |x| \leq \frac{3}{2}, \\ 1, & x > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Предполагается, что $\tilde{F}G_y \subset G_y$, где $G_y: \{|y| < y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$, что равносильно следующему неравенству

$$|y(i+1)| < |y(i)| \text{ для } |y(i)| > y^*, i \in Z^+. \quad (5)$$

При выполнении этих неравенств область G_y притягивает все траектории из $R^1 \setminus G_y$ (т.е. является поглощающей областью для переменной y).

Используя второе уравнение в (1) для \tilde{F} и условия $0 < u(i) < 1, |\tilde{g}(x)| \leq 1$, получается

$$|y(i+1)| \leq \lambda |u(i)y(i)| + \lambda b |\tilde{g}(x)| \leq \lambda |y(i)| + \lambda b < |y(x)|. \quad (6)$$

Из этого неравенства следует, что неравенства (12) выполняются для $|y(x)| \geq \frac{\lambda b}{1-\lambda}$.



Далее рассматривается отображение \tilde{F} в области $G_y : \{|y| < y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$. Теперь цель состоит в том, чтобы найти константу x , определяющую интервал $G_x : \{|x| < x^*\}$, такую, что инвариантная область, $\tilde{F}G \subset G$, принимает форму $G : \{|x| < x^*, |y| < y^*\}$.

Введем два вспомогательных одномерных отображения

$$\begin{aligned} x(i+1) &= X^+(x) \equiv x + a\tilde{g}(x) + y^*, \\ x(i+1) &= X^-(x) \equiv x + a\tilde{g}(x) - y^*, \end{aligned} \quad (7)$$

чтобы использовать их для изучения первого уравнения в отображении (1) для функции $g(x)$, а именно $x(i+1) = x(i) + y(i) + a\tilde{g}(x(i)) \equiv \tilde{X}(x, y)$. Из неравенства

$$X^-(x) \leq \tilde{X}(x, y) \leq X^+(x) \quad (8)$$

следует, что для любых $y \in G_y, i \in Z$ и любого $x(i) \in (-1.5, 1.5)$ образ $(x(i+1), y(i+1))$ отображения \tilde{F} лежит в области $x(i+1) \in [X^-(x(i)), X^+(x(i))], y(i+1) \in G_y$ (см. Рисунок 1).

Используя это свойство, получается, что интервал G_x существует, если для любого $i \in Z^+$ выполняются следующие условия

$$X^+(-0.5) \leq x_r^+, X^-(0.5) \geq x_l^-, \quad (9)$$

где x_r^+ и x_l^- являются правой неустойчивой неподвижной точкой для X^+ и левой неустойчивой неподвижной точкой для X^- соответственно (см. Рисунок 3). Проще говоря, условия (9) означают, что максимум X^+ (минимум X^-), являющийся отображением точки $x(i) = -0.5$ ($x(i) = 0.5$, соответственно) не выходит за пределы неустойчивой фиксированной точки x_r^+ (x_l^- , соответственно).

Подставляя координаты этих неподвижных точек

$$x_r^+ = 1 - \frac{y^*}{2a}, \quad x_l^- = \frac{y^*}{2a} - 1, \quad (10)$$

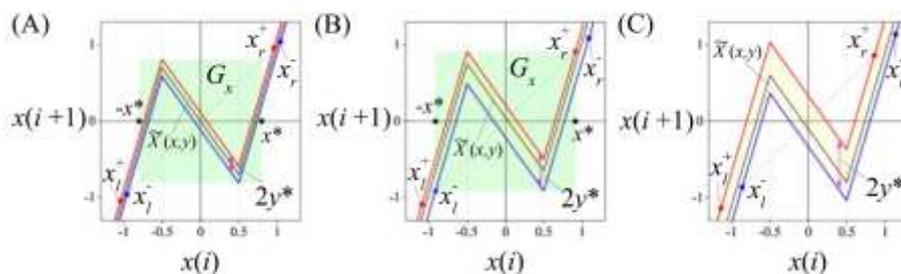


Рис. 3. Графики вспомогательных систем $X^+(x)$ (красная линия) и $X^-(x)$ (синяя линия). (А) Условия (9) выполнены и область G_x существует. (В) Граница области G_x существует для $X^+(-0.5) = x_r^+, X^-(0.5) = x_l^-$. (С) Область G_x отсутствует.

в неравенство (9) для $y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}$ мы получаем условие существования поглощающей области G

$$a^2 + \left(\frac{\lambda b}{1-\lambda} - \frac{3}{2}\right)a + \frac{\lambda b}{2(1-\lambda)} \leq 0. \quad (11)$$

Это неравенство справедливо в интервале $a_1 < a < a_2$, где $a_{1,2} = \frac{1}{4}(3 - 2y^* \mp \sqrt{(2y^* - 1)(2y^* - 9)})$. Другими словами, это справедливо для следующей области определения параметра

$$\lambda < \frac{1}{1 + 2b}. \quad (12)$$

Следовательно, при этом условии отображение \tilde{F} имеет поглощающую область $G : \{|x| < x^* = a + \frac{\lambda b}{1-\lambda} - 0.5, |y| < y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$.



Отображения F и \tilde{F} совпадают в области $|x| < \frac{3}{2}$, содержащей инвариантную область G . Следовательно, G является инвариантом области исходного отображения F .

Шаг 2. Необходимо доказать гиперболичность отображения F . Вариационные уравнения для любой неблуждающей траектории в области G имеют вид

$$T: \begin{cases} \bar{\xi} = p\xi + \eta, \\ \bar{\eta} = \lambda u(q\xi + \eta), \end{cases} \quad (13)$$

где $p = 1 + ag'_x(x)$, $q = bg'_x(x)$. Следовательно, оператор L в Определении является матрицей

$$L = \begin{pmatrix} p & 1 \\ \lambda uq & \lambda u \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Введем неустойчивый конус $K^u = \{\xi, \eta \mid \eta = \alpha\xi, |\alpha| < \chi\}$. Обозначим образующую конус K^u как $l: \eta = \alpha\xi$. Отображение этой линии $\bar{l} = Tl$ имеет параметрический вид

$$\begin{cases} \bar{\xi} = (p + \alpha)\xi, \\ \bar{\eta} = \lambda u(q + \alpha)\xi. \end{cases} \quad (15)$$

Эти уравнения задают неявный вид прямой \bar{l}

$$\bar{\eta} = \bar{\alpha}\bar{\xi} \quad (16)$$

где

$$\bar{\alpha} = \frac{\lambda u(q + \alpha)}{p + \alpha}. \quad (17)$$

Конус K^u инвариантен при условии

$$|\bar{\alpha}| < |\alpha| \text{ для } |\alpha| \geq \chi, \quad (18)$$

откуда следует, что отображение (17) имеет поглощающую область $|\alpha| < \chi$. Из (17) получаются неравенства

$$|\bar{\alpha}| \leq \left| \frac{\lambda uq}{p + \alpha} \right| + \left| \frac{\lambda u}{p + \alpha} \right| |\alpha| < 2\lambda b + \lambda|\alpha|, \quad (19)$$

при условии $|p + \alpha| > 1$. Из неравенств (19) очевидно, что условие (18) справедливо для $|\alpha| \geq \frac{2\lambda b}{1-\lambda}$, т. е. для

$$\chi = \frac{2\lambda b}{1-\lambda}. \quad (20)$$

Оператор L отображает вектор $V_0^u(\xi, \eta) \in K^u$ в вектор $V_1^u(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in K^u$. Можно проверить, что достаточное условие расширения имеет вид

$$|p + \alpha| > \sqrt{1 + \chi^2}. \quad (21)$$

Это условие верно в области параметров

$$a > a^- = \frac{1 + \chi + \sqrt{1 + \chi^2}}{2}. \quad (22)$$

Аналогичный анализ можно провести для устойчивого инвариантного конуса K^s . □

Список литературы:

1. Белых, В.Н., Гречко, Д.А. Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра // Динамические Системы – 2018. – Т. 8. - №. 4. С. 373-383.
2. V.N. Belykh, B. Ukrainsky, A discrete-time hybrid Lurie type system with strange hyperbolic non-stationary attractor. Dynamics and control of hybrid mechanical systems, in World Scientific Series on Nonlinear Science, Series B (World Scientific, London, Vol. 14 (2010)
3. V. Belykh, N. Komrakov, B. Ukrainsky, Hyperbolic attractors in a family of multidimensional maps with cusp-points, in Proc. of Int. Conf. Progress in Nonlinear Science Dedicated to the 100th Anniversary of A. Andronov (2002)



4. Barabash, N.V., Belykh, V.N. Chaotic driven maps: Non-stationary hyperbolic attractor and hyperchaos // The European Physical Journal Special Topics. – 2020. – Vol. 229. –№. 6-7. – pp. 1071–1081.

CHANGING THE CONTROL PARAMETER OF DISCRETE TIME LURIER TYPE SYSTEM BIFURCATIONS

Vladimir N. Belykh, Nikita V. Barabash, Dina A. Grechko

Abstract. A simple example of a non-autonomous map with various chaotic attractors changing in time is considered. The definition of a nonstationary hyperbolic attractor of driven maps is formulated. The existence theorem for a nonstationary hyperbolic attractor in a two-dimensional driven map is proved. The analysis is based on the approach of auxiliary systems and the construction of invariant cones.

Keywords: non-stationary attractor, non-autonomous map, hyperbolicity, chaos.

