

УДК 517.9

**Барабаш Никита Валентинович**<sup>1,2</sup>, ассистент кафедры математики ВГУВТ, м.н.с. научно-исследовательской лаборатории динамического хаоса ННГУ

e-mail: barabash@itmm.unn.ru

**Бакалина Дарья Александровна**<sup>1</sup>, студентка 3 курса ННГУ,

e-mail: darya.bakalina@gmail.com

<sup>1</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

<sup>2</sup>Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.

## СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА

*Аннотация.* В работе рассматривается синхронизация ансамбля из трех линейно связанных идентичных элементов, имеющих хаотический аттрактор. В качестве элементов выбраны оригинальные системы Лоренца и кусочно-линейные системы лоренцевского типа. Численно построены области параметров, соответствующие устойчивой синхронизации ансамблей. Показано подобие областей синхронизации для обоих ансамблей.

*Ключевые слова:* синхронизация, динамическая система, модель Лоренца, кусочно-линейная система.

Рассматривается ансамбль из трех глобально связанных трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = F(x_i) + k \sum_{j=1}^N P(x_j - x_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $F(x_i) \in \mathbb{R}^3$ ,  $k > 0$  – коэффициент силы связи, а матрица  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

определяет связь систем через первую переменную. В настоящей работе численно решается задача об устойчивой  $\varepsilon$ -синхронизации [5] в системе (1) для случаев, когда  $F(x_i)$  задана в виде (а) системы Лоренца [1] и (б) кусочно-линейной системы лоренцевского типа [2-4]. В обоих случаях параметры  $F(x_i)$  выбирались из области, соответствующей хаотическому поведению. Устойчивая  $\varepsilon$ -синхронизация имеет место, если выполняются условия

$$\|x_i - x_j\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где параметр  $\varepsilon$  – максимальная допустимая разность между векторами  $x_i$  и  $x_j$ .

Численный эксперимент проводился следующим образом [результаты см. на Рисунке 1.]. Из поглощающей области системы  $F(x_i)$  случайным образом выбирались начальные условия, для которых производился прямой численный счет системы (1) на интервале времени  $T \in [0, 1000]$  с шагом  $h = 0.001$  при фиксированных значениях силы связи  $k$  и параметров  $r$  (для системы Лоренца [1]) и  $b$  (для кусочно-гладкой системы лоренцевского

типа [2-4]). Синхронизация считалась устойчивой, если  $\|x_i(t) - x_i(t)\| < \varepsilon = 0.1$  для  $t \in [T - 40, T]$ . Для каждой пары фиксированных значений  $k$  и  $r$  для Лоренца и  $k$  и  $b$  для кусочно-гладкой системы было проведено 50 таких испытаний, в  $m$  из которых наступала  $\varepsilon$  - синхронизация. На диаграммах Рисунка 1 частотная вероятность наступления синхронизации  $\frac{m}{50}$  отмечена цветом: в синей области синхронизация невозможна ( $m = 0$ ), в красной – достоверна ( $m = 50$ ), в зеленой и желтых областях  $0 < m < 50$ .

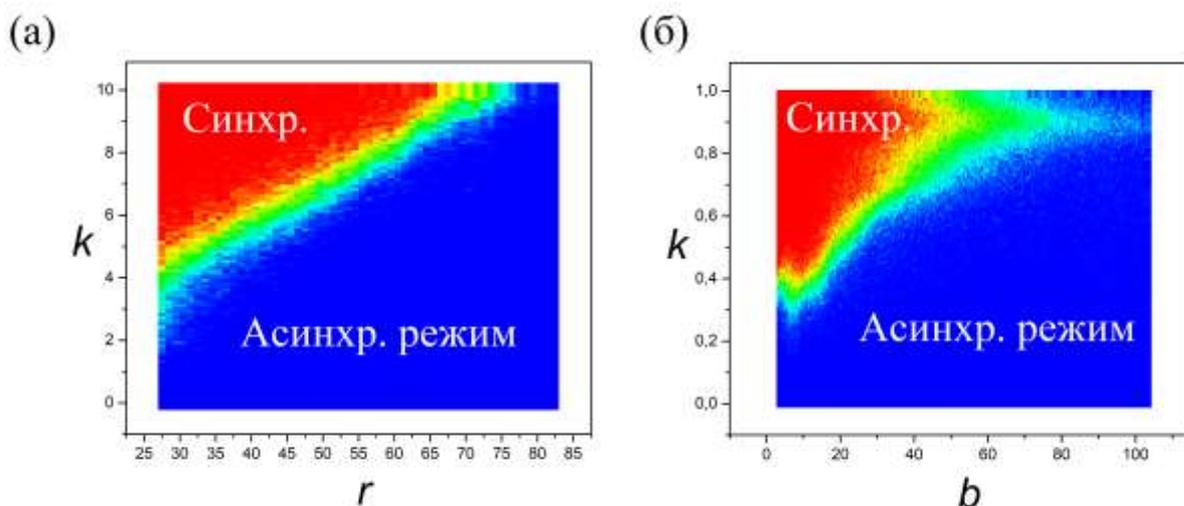


Рисунок 1 – Диаграмма синхронных и асинхронных режимов в системе (1) для связанных систем Лоренца [фрагмент (а)] и кусочно-гладких систем лоренцевского типа [фрагмент (б)]. Остальные параметры  $F(x_i)$  имеют значения:  $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$  (Лоренц);  $\alpha = 2, \lambda = 0.294, \nu = 0.65, \omega = 2, \delta = 0.588$  (кусочно-линейная система лоренцевского типа).

Результаты численного эксперимента свидетельствуют о подобию областей синхронизации для сети оригинальных систем Лоренца и сети ее кусочно-линейных аналогов (параметр  $b$  кусочно-линейной системы лоренцевского типа соответствует параметру  $r$  оригинальной модели Лоренца). Это позволяет сделать предположение и о подобию процессов установления синхронизации, и, следовательно, позволяет рассматривать сеть кусочно-гладких систем лоренцевского типа, допускающих аналитическое исследование, в качестве подходящей модели сети систем Лоренца.

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 22-21-00553) и Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

#### Список литературы:

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of atmospheric sciences. – 1963. – Т. 20. – №. 2. – С. 130-141.
2. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019. – Т. 29. – №. 10. – С. 103108.
3. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – Т. 31. – №. 4. – С. 043117.
4. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Bifurcations of chaotic attractors in a piecewise smooth Lorenz-type system // Automation and Remote Control. – 2020. – Т. 81. – №. 8. – С. 1385-1393.

5. Barabash N. V. et al. Partial synchronization in the second-order Kuramoto model: An auxiliary system method //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – T. 31. – №. 11. – C. 113113.

## **SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC PIECEWISE-LINEAR LORENZ TYPE-SYSTEMS**

Nikita V. Barabash, Darya A. Bakalina

*Abstract. We consider the synchronization of an ensemble of three linearly coupled identical elements with a chaotic attractor. Original Lorenz systems and piecewise-linear Lorenz-type systems are chosen as elements. The domains of parameters corresponding to the stable synchronization of the ensembles are numerically constructed. The similarity of the synchronization regions for both ensembles is shown.*

*Keywords: synchronization, dynamical system, Lorenz model, piecewise-linear system.*

