УДК 517.925/926

Белых Владимир Николаевич[1,2], профессор, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», главный научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского,
e-mail: belykh@vsawt.com
Барабаш Никита Валентинович [1,2], ассистент кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», младший научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского,
e-mail: barabash@itmm.unn.ru
Гречко Дина Алексеевна[1,2], аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», младший научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского,
e-mail: d.grechko.18@gmail.com

[1]Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.
[2]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ И АТТРАКТОРОВ В МНОГОМЕРНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЭНО

Аннотация. Рассматривается многомерное отображение Эно общего вида. Приведена замена переменных и параметров, с помощью которых отображение записывается в виде нормальной формы отображения с одной нелинейностью. Доказана теорема о локализации аттрактора. Получены условия существования бифуркации гомоклинических орбит, соответствующей рождению хаотического аттрактора.

Ключевые слова: отображение Эно, гомоклиничекие орбиты, бифуркация, аттрактор

Рассматривается многомерное отображение Эно общего вида:

$$\begin{cases} \bar{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \,; \\ \bar{v}_1 = x; \\ \bar{v}_i = v_{i-1}, i = \overline{2,n}. \end{cases} \tag{1}$$

где $a_i \in R^1$, $f(x)$ – функция с тремя участками монотонности.

Путём последовательных замен $v_j = u_j + x, j = \overline{1,n},\ u_0 \equiv 0$ и $a_1 u_1 = y_1, \dots, a_n u_n = y_n$ $\left(a_j u_j = y_j\right)$, где $j = n + 1 - i$ [1], а также при введении обозначений

$$Y = \sum_{j=1}^{n} y_j \tag{2}$$

$$q_1 = \frac{a_2}{a_1}, q_2 = \frac{a_3}{a_2}, \dots, q_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \tag{3}$$

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j \qquad (4)$$

исходное отображение (1) записывается в виде нормальной формы [2] отображения типа Лурье $X \to \Phi(X)$, $X = (x; y_1; \dots; y_n)$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + Y + F(x); \\ \bar{y}_1 = -a_1\big(Y + F(x)\big); \\ \bar{y}_i = -q_{i-1}y_{i-1} - a_i\big(Y + F(x)\big), i = \overline{2, n}, \end{cases} \qquad (5)$$

где

$$F(x) = -(1 - A)x - f(x). \qquad (6)$$

Пусть функция $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-\nu}, & x < -\nu; \\ -\dfrac{x}{\nu}, & |x| \le \nu; \\ \dfrac{x-1}{1-\nu}, & x > \nu. \end{cases} . \qquad (7)$$

Диссипативность по y −координатам отображения (5) доказана в [3]. Это означает, что отображение Φ переводит координаты y в область $G_y = \{y \mid \ \|Y\| < \gamma\}$, где $\|Y\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполняются условия $a < q_j < q < 1$; $A > 0$. Тогда существует поглощая область $G = \left\{x, y \mid |x| \le \frac{A}{1-A}, \|Y\| \le \gamma\right\}$, т.е. $\Phi G \subset G$.

Из этой теоремы следует, что отображение Ф имеет аттрактор $A \subset G$.

Отображение (5), (7) имеет три неподвижные точки $O_0 = (x = 0, y_i = 0)$, $O_{1,2} = (x = \pm 1, y_i = 0)$. При этом O_0 в зависимости от параметра меняет устойчивость, а $O_{1,2}$ всегда являются седлами с одномерным неустойчивым многообразием W^u и -мерным устойчивым многообразием W^s. Обозначим за $\mathbf{e} = (\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ собственный вектор $O_{1,2}$, соответствующий мультипликатору $\mu^u > 1$, и за W_{loc}^s: $C_0(x \pm 1) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i = 0$ собственную гиперплоскость $O_{1,2}$, соответствующую мультипликаторам $|\mu_i^s| < 1$. В силу кусочной линейности функции $F(x)$ эти многообразия и их образы в областях $|x| > \nu$ представимы в виде уравнения прямой W^u: $(x = \pm 1 + \xi t, y_i = \eta_i t, i = 1, \dots, n)$ с параметром t и уравнения гиперплоскости $W^s = W_{loc}^s$.

Неустойчивое многообразие W^u пересекает границу $x = -\nu$ в точке $X_0(x = -\nu, y_i = \eta_i(1 - \nu)\xi^{-1}, i = \overline{1, n})$.

Теорема 2. Пусть образ точки X_0, $X_1 = \Phi(X_0)$, лежит «выше» правой гиперплоскости W^s, т.е. имеет место неравенство

$$\Delta = \left[C_0(x - 1) + \sum_{i=1}^{n} (C_i y_i)\right]\Bigg|_{X_1} > 0. \qquad (8)$$

Тогда отображение Ф – (5) имеет две грубые гетероклинические орбиты сёдел O_1 и O_2, образующие контур. Поверхность коразмерности 1, $\Delta = 0$, соответствует бифуркации рождения гомоклинических орбит в окрестности гетеклинического контура. В области (8) отображение имеет хаотический аттрактор.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-21-00553) и Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

Список литературы:

1. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2012 – Vol. 8 – No. 1 – pp. 3-28.
2. V.N. Belykh, Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map // Sb. Math. – 186:3 (1995), 311–326
3. Белых, В.Н., Барабаш, Н.В., Гречко, Д.А., Мордвинкина, И.А. Новый взгляд на многомерное отображение Эно // Великие реки - 2020 : Труды 22-го международного научно-промышленного форума, Нижний Новгород, 27–29 мая 2020 года. – Нижний Новгород: Волжский государственный университет водного транспорта, 2020. – С. 75.– Режим доступа: http://вф-река-море.рф/
4. Белых В. Н., Гречко Д. А. Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра // Динамические системы. – 2018. – Т. 8. – №. 4. – С. 373-383.
5. Barabash N. V., Belykh V. N. Chaotic driven maps: Non-stationary hyperbolic attractor and hyperchaos // The European Physical Journal Special Topics. – 2020. – Т. 229. – №. 6. – С. 1071-1081.

ANALISYS OF HOMOCLINICAL BIFURCATIONS AND ATTRACTORS IN A MULTIDIMENSIONAL HENON MAP

Vladimir N. Belykh, Nikita V. Barabash, Dina A. Grechko

Abstract. The object of this paper is a multidimensional Henon map. We changed its variables and parameters in order to reduce the map to a normal form – the map with one nonlinearity. Attractor localization theorem is proved. Conditions for the existence of a bifurcation of homoclinic orbits corresponding to the birth of a chaotic attractor are obtained.

Keywords: Henon map, homoclinical orbits, bifurcations, attractor