УДК 517.9

Белых Владимир Николаевич[1, 2] , профессор, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математики ВГУВТ, г.н.с. научно-исследовательской лаборатории динамического хаоса ННГУ
e-mail: belykh@unn.ru
Кащеева Ольга Николаевна[1], к.ф-м.н., доцент кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ»
e-mail: pakhareva@rambler.ru
Барабаш Никита Валентинович[1, 2], ассистент кафедры математики ВГУВТ, м.н.с. научно-исследовательской лаборатории динамического хаоса ННГУ
e-mail: barabash@itmm.unn.ru

[1]Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.
[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ СЕДЛО-ФОКУСА И ШИЛЬНИКОВСКИЙ ХАОС В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В работе исследуется нелинейная динамическая система четвертого порядка с тремя состояниями равновесия. С помощью современных методов качественного анализа обыкновенных дифференциальных уравнений доказано существование бифуркации гомоклинической восьмерки седло-фокуса, что при выполнении условий Шильникова обеспечивает хаотическую динамику системы.

Ключевые слова: динамические системы, гомоклинические орбиты, бифуркации, хаотический аттрактор.

Рассматривается четырехмерная система уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} = u \quad & (1-\varepsilon^2)\dot{u} + \lambda(H-a)u + H_x - \varepsilon(hv + g(y)) = 0 \\ \dot{y} = v \quad & (1-\varepsilon^2)\dot{v} + hv + g(y) - \varepsilon(\lambda(H-a)u + H_x) = 0' \end{aligned} \qquad (1)$$

являющаяся обобщением системы уравнений на синхронном многообразии из [1].

Здесь $H(x,u) = f(x) + \frac{u^2}{2}$, где $f(x)$ − четная функция, удовлетворяющая условиям:

$$f(0) = b, f(1) = 0,$$
$$f_x(0) = f_x(1) = 0,$$
$$f_x < 0, \text{при } 0 < x < 1,$$
$$f_x \geq p > 0, \text{при } x > 1;$$

$g(y)$ есть нечетная возрастающая ($g_y \geq q > 0$) функция; a – произвольный параметр, $b, p, q, \lambda, h, \varepsilon$ – положительные параметры. Данная система имеет три состояния равновесия $O_l(x_l, 0,0,0)$, где $l = \overline{0,2}$, $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1$. При малых значениях параметра ε состояния равновесия $O_{1,2}(\mp 1,0,0,0)$ являются седлами, а начало координат

$O_0(0,0,0,0)$ – это седло-фокус с одномерным неустойчивым многообразием W^u_{loc} и трехмерным многообразием W^s_{loc}.

С помощью современных методов качественного анализа систем дифференциальных уравнений ([2] – [7]) доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Система* (1) *диссипативна, т.е. в фазовом пространстве существует замкнутая область, притягивающая все траектории системы.*

Теорема 2. *Существует примыкающий к нулю интервал изменения параметра* $a \in [0, a_1)$*, для точек которого система* (1) *бистабильна: в фазовом пространстве системы* (1) *существуют замкнутые области* G_1 *и* G_2*, гомеоморфные шарам, содержащие равновесия* O_1 *и* O_2*, такие, что все траектории, начинающиеся в точках области* $\mathbb{R}^4 \backslash (G_1 \cup G_2)$*, попадают и остаются в* G_1 *и* G_2*.*

Теорема 3. *В пространстве динамических систем* (1)*, определенном функциями* $f(x), g(y)$ *и параметрами* $a, \lambda, h, \varepsilon$*, существует поверхность коразмерности* 1*, соответствующая бифуркации гомоклинической восьмерки седло-фокуса.*

Следствие. *В случае, когда седло-фокус* O_0 *удовлетворяет условию Шильникова, окрестность гомоклинической восьмерки содержит бесконечное множество неустойчивых (седловых) орбит, определяющее хаотическую динамику.*

Список литературы:

1. Белых В.Н., Кащеева О.Н. Бифуркации рождения странных аттракторов в системе с тремя равновесиями // Великие реки 2019: Материалы научно-методической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов "Проблемы использования и инновационного развития внутренних водных путей в бассейнах великих рек". ФГБОУ ВО «ВГУВТ». – 2019. – URL: http://вф-река-море.рф/2019/PDF/7_4.pdf

2. Belykh V.N. Homoclinic and heteroclinic orbits of a family of multidimensional dynamical systems // Proc. of the Steklov Inst. Math. “Dynamical systems and related topics: collections of articles. To the 60-th anniversary of academician D.V. Anosov”. –1997. – 216. – P. 14–26.

3. Belykh V.N. Homoclinic and heteroclinic lincages in concrete systems: nonlocal analysis and model maps // Advances in the Mathematical Sciences, American Math. Soc. Translations, Series 2, – 2000. – 200. – P. 51–62.

4. Belykh V.N., Pankratova E.V. Shilnikov Chaos in Oscillators With Huygens Coupling // Int. J. Bifurcation Chaos. 24:8 (2014):1440007

5. Shilnikov L.P. A case of the existence of a denumerable set of periodic motions // Sov. Math. Dokl. –1965. – 6.– P. 163–166.

6. Shilnikov L.P. & Shilnikov A.L. Shilnikov bifurcation // Scholarpedia. 2(8) (2007): 1891.

7. Grechko D. A., Barabash N. V., Belykh V. N. Homoclinic Orbits and Chaos in Nonlinear Dynamical Systems: Auxiliary Systems Method // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – T. 42. – №. 14. – С. 3365-3371.

HOMOCLINIC ORBITS OF A SADDLE-FOCUS AND SHILNKOV’S CHAOS IN THE FOUR-DIMEMENSIONAL SYSTEM OF ODE

Vladimir N. Belykh, Olga N. Kashcheeva, Nikita V. Barabash

Abstract. We provide an investigation of four-dimensional nonlinear dynamical system.

Using the modern qualitative methods of the theory of ODE we prove the existence theorem on homoclinic orbits connection of the saddle-focus satisfying Shilnikov’s conditions. These conditions imply the chaotic dynamics of our system.

Keywords: dynamical systems, homoclinic orbits, bifurcations, chaotic attractor.