

УДК 517.9

**Белых Владимир Николаевич**<sup>1, 2</sup>, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математики ВГУВТ, г.н.с. научно-исследовательской лаборатории динамического хаоса ННГУ  
e-mail: belykh@unn.ru

<sup>1</sup>Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия,

<sup>2</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

### ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРА И БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМЕ АСТАХОВА-АНИЩЕНКО

*Аннотация.* Как показывают численные исследования, известная модель Анищенко-Астахова, описывающая радиотехнический генератор, имеет хаотическую динамику. Тем не менее, строгие доказательства существования хаотического аттрактора до сих пор отсутствуют. В настоящей работе представлен возможный бифуркационный сценарий, приводящий к образованию хаотического аттрактора в некоторой компактной области. Этот сценарий имеет отношение к подобным системам, имеющим одно седловое состояние равновесия.

*Ключевые слова:* динамическая система, седло-фокус, аттрактор, бифуркация, хаос.

Рассматривается система трех дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \gamma - (1 + z)x - (z - m)y, \\ \dot{z} &= \mu(-z + \Phi(x)),\end{aligned}\tag{1}$$

где функция  $\Phi(x) = \left(\frac{1+\text{sign } x}{2}\right)x^2$ . К системе (1) приводится известная система Анищенко-Астахова, описывающая динамику генератора стохастических колебаний [1]. Бифуркации и хаотические аттракторы этой системы изучались в многочисленных работах [2, 3] с помощью компьютерного моделирования. Настоящая работа служит первым этапом качественного исследования системы (1) в соответствии с настоятельной давней просьбой проф. В.С. Анищенко.

1. Точка  $O(\gamma, 0, \gamma^2)$  есть единственное состояние равновесия седлового типа с одномерным устойчивым многообразием  $W^s$  и двумерным неустойчивым –  $W^u$ . Приводится качественное описание бифуркационного сценария возникновения хаотических колебаний в системе (1).

2. В фазовом пространстве системы (1) существует гомеоморфная шару область  $G$ , притягивающая все траектории с начальными условиями из области  $\mathbb{R}^3 \setminus G$ .

3. Из сделанных утверждений следует существование аттрактора  $A \subset G$ , отличного от состояния равновесия.

Отметим, что подобным свойством (единственное седловое равновесие в притягивающей области) обладает целый ряд систем. К таким системам в первую очередь относятся модели колебаний мембранного потенциала нейрона: уравнения Ходжкина-Хаксли, Хиндмарша-Роуза и др. [4, 5]. Простейшим аттрактором  $A$  систем с единственным седловым состоянием равновесия является устойчивый предельный цикл  $C$ , служащий краем многообразия  $W^u$ . При нерезонансной бифуркации Неймарка-Сакера цикл  $C$  теряет устойчивость и из него рождается устойчивый тор  $T$ , на который «наматывается» неустойчивое многообразие  $W^u$ , образуя воронку. Разрушение инвариантного тора  $T$  приводит к бифуркации гомоклинической орбиты седло-фокуса, в результате которой аттрактор  $A$  становится хаотическим.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 22-21-00553) и Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

#### Список литературы:

1. Анищенко В.С., Астахов В.В. Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. – 1983. – Т. 28. – №. 6. – С. 1109-1115.
2. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. – М.: наука, 1990. – Т. 312.
3. Анищенко В. С., Астахов В. С., Вадивасова Т. Е. Генератор Анищенко-Астахова как одна из базовых моделей детерминированного хаоса //Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. – 2005. – Т. 5. – №. 1. – С. 54-68.
4. Belykh V. N. et al. Homoclinic bifurcations leading to the emergence of bursting oscillations in cell models //The european physical journal E. – 2000. – Т. 3. – №. 3. – С. 205-219.
5. Belykh V., Belykh I., Mosekilde E. Hyperbolic Plykin attractor can exist in neuron models //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – Т. 15. – №. 11. – С. 3567-3578.

### ATTRACTOR'S LOCALIZATION AND BIFURCATIONS IN ANISHCHENKO-ASTAKHOV SYSTEM

Vladimir N. Belykh

*Abstract.* Numerical studies show that the well-known Anishchenko-Astakhov model, which describes a radio engineering generator, has chaotic dynamics. However, rigorous evidence for the existence of a chaotic attractor is still lacking. In this paper, we present a possible bifurcation scenario leading to the formation of a chaotic attractor in some compact domain. This scenario is relevant for similar systems that have one saddle point equilibrium.

*Keywords:* dynamical system, saddle-focus, attractor, bifurcation, chaos.