УДК 531.19

Горбиков Сергей Павлович[1], д.ф.м.н., профессор,
e-mail: gorby50@yandex.ru
Меньшенина Алевтина Владимировна[2], старший преподаватель
e-mail: alya112@yandex.ru

[1]Нижегородский государственный архитектурно – строительный университет, г. Нижний Новгород, Россия.
[2]Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ОДНОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. Исследуется бифуркация, связанная с попаданием периодического движения на границу области существования движений с бесконечным числом ударов за конечное время. В качестве примера рассматривается одна виброударная система. В результате этой бифуркации в системе возникают различные подковы Смейла и, как следствие, хаотические движения. В работе численно изучаются хаотические движения и их численные характеристики.

Ключевые слова: бифуркации виброударных систем, подковы Смейла, хаотические движения.

В докладе представлены результаты численного изучения хаотических движений следующей динамической системы, описывающей движение подвешенного на пружине груза. Груз совершает соударения с неподвижным ограничителем под действием постоянной и периодической сил. Движение виброударника с зазором описывается системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} &\ddot{q} + \lambda^2 q = V\sin t + 1, && \text{при} \quad q > 0, \\ &\dot{q}^{+} = -R\dot{q}^{-}, && \text{при} \quad q = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь используются обозначения $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$, $\ddot{q} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$; $\dot{q}^{-}$ и $\dot{q}^{+}$ - соответственно до- и послеударные значения скорости. Движение груза между ударами описывается первым уравнением системы (1). Мгновенный удар происходит при достижении поверхности q=0. Коэффициент R, $0 < R < 1$, - коэффициент восстановления; $V > 1$, $\lambda > 0$.

Фазовое пространство системы (1) составляют точки $(q, \dot{q}, t)$, при этом координаты удовлетворяют неравенствам: $q \geq 0$, $-\infty < \dot{q} < +\infty$, $0 \leq t \leq 2\pi$; точки $(q, \dot{q}, t = 0)$ и $(q, \dot{q}, t = 2\pi)$ отождествлены.

Изучение системы (1) проводится с помощью метода точечных отображений [2], а именно рассматривается [1] отображение T, которое переводит точку $(0, \dot{q} \geq 0, t_1)$ в точку $(0, \dot{q} > 0, t_2)$.

Часть плоскости $q = 0$, $\dot{q} > 0$ (при соответствующих значениях параметров) разделена на множества D_{k-1}, состоящие из точек $(0, \dot{q} > 0, t)$, образы которых после действия отображения T^k, $k = 2,3,\ldots$ (т.е. отображение T действовало k раз) находятся в этой же части плоскости $q = 0$, $\dot{q} > 0$.

В системе (1) происходит [3] бифуркация периодического движения, которая приводит к появлению хаотических движений. Появление после бифуркации хаотических движений объясняется [3, 4] возникновением подков Смейла, кратных подков Смейла. Они образуются в системе (1) в результате действия соответствующего отображения T^k на множество D_{k-1} при некоторых значениях k. Под кратными подковами Смейла понимаются [4] множества, образующиеся в результате действия большего числа итераций отображения T^k на множество D_{k-1} и имеющие три и больше компонент связности.

В системе (1) численно установлено наличие [4, 5] этих образований, в их окрестности наблюдались хаотические движения, т.е. [6] непериодические и существенно зависящие от начальных условий. Численный анализ наблюдаемых после изучаемой бифуркации хаотических движений указывает [5, 7] на существование предельного множества для этих хаотических движений.

При численном исследовании предельного множества хаотических движений малая окрестность S этого предельного множества делится на ячейки и отслеживается поведение траектории системы (1), выходящей из произвольной точки этой окрестности. В течение всего времени наблюдения отмечается, в какие ячейки попадает фазовая точка после каждой итерации отображения T^k. В результате получено статистическое распределение частот для каждой ячейки. Вычисления показывают, что найденные статистические распределения частот для различных начальных точек почти не отличаются. Аналогично получено распределение частот попадания в ячейки фазовых точек после действия одной итерации отображения T^k, примененного к 10^4 равномерно выбранных в окрестности S начальных точек. Это статистическое распределение частот, как показывают расчеты, тоже отличается незначительно от описанных выше распределений частот, найденных для отдельных точек. Также проведено следующее исследование. В окрестности S предельного множества хаотических движений произвольно выделялась небольшая область, в которой равномерно выбирались 10^4 начальных точек. Далее для них получено статистическое распределение частот попадания в ячейки окрестности S фазовых точек после действия одной итерации отображения T^k. Расчеты показывают, что статистическое распределение частот, вычисленное для разных начальных областей, отличаются друг от друга незначительно, и почти не отличаются от описанных ранее распределений частот, найденных для отдельных точек.

Результаты исследования указывают на то, что при попадании в рассмотренную малую окрестность S предельного множества траектории остаются в этой окрестности и имеют признаки хаотичности. Полученные численно статистические характеристики также свидетельствуют о том, что изучаемые хаотические движения в малой окрестности S обладают свойствами перемешивания и равенства среднего по времени среднему по ансамблю.

Список литературы:

1. Горбиков С.П. Основные установившиеся движения осциллятора без вязкого трения с зазором и неподвижным ограничителем // Вестн. Нижегород. гос. ун-та. Сер. мат. моделир. и опт. упр. Н.Новгород: изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 1998. – Вып. 2(19). – С. 63-73.

2. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1972. – 471 с.

3. Горбиков С. П., Меньшенина А.В. Бифуркация, приводящая к возникновению хаотических движений в динамических системах с ударными взаимодействиями // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – №. 8. – С. 1046-1052.

4. Горбиков С. П., Меньшенина А.В. Возникновение хаотических движений в случае существования кратных подков Смейла в динамических системах с ударными взаимодействиями // Вестн. Нижегород. гос. ун-та. Сер. мат. моделир. и опт. упр. Н.Новгород: изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 2004. – Вып. 1(27). – С. 14-24.

5. Горбиков С. П., Меньшенина А.В. Статистическое описание предельного множества для хаотических движений виброударной системы // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №. 10. – С. 70-78.

6. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной механике. – Москва: Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.

7. Горбиков С. П., Меньшенина А.В. Статистические характеристики хаотических движений одной виброударной системы // XI Всеросс. съезд по фунд. пробл. теор. и прикл. мех.. Тез. докл.– 2015. – С. 1015-1017.

NUMERICAL ANALYSIS OF CHAOTIC MOTIONS OF ONE VIBROIMPACT SYSTEM

Sergey P. Gorbikov, Alevtina V. Mensheninna

Abstract. The bifurcation caused by arrival of periodic motion on the infinitely impact motions domain border is numerically studied by example of vibroimpact system in the report. Smale horseshoes are observed in this system after the bifurcation. Calculations show that the chaotic motions generated by Smale horseshoes have a limiting set. Statistical study of chaotic motions in limiting set neighborhood is carried out.

Keywords: bifurcations of vibroimpact systems with impact interactions, Smale horseshoes, chaotic motions.