УДК 532.529.6
DOI: 10.31857/S032079192270006X

Мельников Николай Павлович[1], Доцент кафедры физики
e-mail: melnikov50@mail.ru

[1] Волжский государственный университет водного транспорта, (ФГБОУ ВО «ВГУВТ»), г. Нижний Новгород, Россия.

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ КАВИТАЦИОННОЙ ПОЛОСТИ С УЧЕТОМ КОАГУЛЯЦИИ

Аннотация. В работе приводится модель коагуляции под действием сил Бьеркнесса, пульсирующих в неоднородном акустическом поле, кавитационных полостей. Для учета влияния изменения равновесного радиуса полости за счет коагуляции на ее поступательное движение и на ее радиальные пульсации предлагается система трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: кавитационная полость, коагуляция кавитационных полостей, сила Бьеркнесса..

Введение

Скорость дегазации жидкости, её кавитационная прочность, кавитационная эррозия, ограничивающая скорость гребных винтов и вызывающая их разрушение, протекание самых различных процессов в элементарной кавитационной области в существенной мере зависят от способности микропузырьков объединяться под действием внешних возмущений, например под действием пульсаций давления

В настоящее время можно считать общепризнанным, что при наложении акустического поля на некоторый объем жидкости параметры этой жидкости изменяются таким образом, что акустическое давление, при котором при прочих равных условиях возникает кавитация, уменьшается по мере увеличения длительности импульса звукового давления. Существует, по крайней мере, два фактора, определяющих процесс монотонного увеличения во времени средних размеров микрозародышей под действием звукового давления: диффузия и коагуляция. Влияние диффузии на рост пульсирующего пузырька подробно обсуждается в обзорах [1, 2]. Коагуляционное развитие взаимодействующих между собой микрозародышей анализируется в работе [3].

Протекание самых различных процессов в кавитационной зоне может зависеть от возможности коагуляции пузырьков под действием внешних сил. Действие неоднородного акустического поля на микропузырьки в проточном акустическом резонаторе приводят к неравномерному распределению концентрации пузырьков [4-6], что позволяет управлять концентрацией пузырьков и потоками малых пульсирующих частиц.

Методы. Модель коагуляции кавитационных полостей при поступательном перемещении

При поступательном перемещении пульсирующих полостей в неоднородных акустических полях происходит их взаимодействие за счет сил Бьеркнеса [7]. Более крупная полость будет притягивать к себе мелкие полости и за счет коагуляции будет расти ее равновесный радиус. Следовательно, для учета влияния изменения равновесного радиуса полости на её пульсации и на поступательное движение необходимо совместное интегрирование трех дифференциальных уравнений, выражающих зависимость от времени текущего радиуса $R(t)$, координаты поступательного движения $x(t)$, и равновесного радиуса полости $R_0(t)$.

Пусть кавитационная полость радиуса $R_0(t)$, находится под действием неоднородного акустического поля вида

$$P_\infty = P_0 + P_m \sin(2\pi ft)\cos(2\pi \cdot x/\lambda)$$

в сжимаемой вязкой жидкости, в которой, также находится другие полости, радиусы которых много меньше R_0. Здесь P_∞ - давление на бесконечности, P_0 – статическое давление в жидкости, P_m и f – амплитуда и частота акустического поля, λ – длина акустической волны.

Под действием градиентного акустического поля полость радиуса R_0 перемещается поступательно со скоростью $U_П$. Если полость радиуса R_0 дорезонанса, то и другие полости с меньшими радиусами также дорезонансны, и они перемещаются в пучность акустического поля [8], притягиваясь друг к другу в результате Бьеркнесовского взаимодействия. В противном случае полость радиуса R_0 отталкивает малые полости. Будем считать, что малые полости изотропно распределены по пространству. Благодаря этой симметрии, а также тому, что радиус R_0 много больше радиусов других полостей, влиянием малых полостей на движение крупной будем пренебрегать и считать, что только полость радиуса R_0 притягивает к себе полости меньших размеров. Расстояние, на котором все полости радиуса R_1 захватываются и, в конце концов, коагулируют с большой полостью, назовем радиусом захвата $R_{ЗАХ}$. В данном случае нас не будут интересовать траектории маленьких пузырьков.

Так как $R_0 >> R_1$, то скорость поступательного движения большой полости много больше скорости малой полости [9] и мы будем ею пренебрегать. Это означает, что распределение по размерам и по пространству пузырьков радиуса R_1 со временем не меняется.

При поступательном перемещении полости радиуса R_0 за время Δt будут захвачены все полости радиуса R_1, находящиеся внутри объема $\pi R_{ЗАХ}^2 \Delta x$, где $\Delta x = U_П \Delta t$. Количество захватываемых полостей равно $\pi R_{ЗАХ}^2 \Delta x N(R_1)\Delta R$, где $N(R_1)\Delta R$ – количество полостей размера $R_1 \pm \Delta R_1$ в единице объема. Масса газа этих полостей равна

$$\Delta m_1 = \pi R_{ЗАХ}^2 \Delta x N(R_1)(P_0 + \frac{2\sigma}{R_1})\frac{4}{3}\pi R_1^3 \frac{\mu'}{BT'}$$

где μ' - моль, $B -$ универсальная газовая постоянная, $T' -$ абсолютная температура.

Проинтегрировав по всему диапазону размеров, находящихся в жидкости полостей от $R_{\min}$ до $R_{\max}$, получим полное изменение массы газа в полости радиуса R_0

$$\frac{dm}{dt} = \pi^2 U_П \frac{4}{3}\frac{\mu'}{BT'} \int_{R\min}^{R\max} R_{ЗАХ}^2 N(R_1)(P_0 + \frac{2\sigma}{R_1}) R_1^3 dR_1 \tag{1}$$

Результаты

Получим теперь выражение для скорости изменения радиуса R_0.
Давление газа в полости связано с массой газа соотношением:

$$m = P_{Г0} \frac{4}{3}\pi R_0^3 \frac{\mu'}{BT'}$$

Дифференцируем по времени это выражение и, считая процесс изотермическим, получим

$$\frac{dm}{dt} = \pi \frac{4}{3}\frac{\mu'}{BT'}(3P_0 R_0^2 + 4\sigma R_0)\frac{dR_0}{dt}$$

отсюда находим, что

$$\frac{dR_0}{dt} = \frac{\frac{dm}{dt}}{\frac{4}{3}\pi(3P_0 R_0^2 + 4\sigma R_0)\frac{\mu'}{BT'}}$$

Следовательно

$$\frac{dR_0}{dt} = \frac{\pi U_П \int_{R\min}^{R\max} R_{ЗАХ}^2 N(R_1)(P_0 + \frac{2\sigma}{R_1}) R_1^3 dR_1}{3P_0 R_0^2 + 4\sigma R_0} \tag{2}$$

Получим теперь выражение для радиуса захвата $R_{ЗАХ}$.

Выражение для силы взаимодействия двух синфазно пульсирующих полостей радиусов R_1 и R_2 с точностью до членов порядка $(R_1/l)^2$ и $(R_2/l)^2$, где l – расстояние между центрами полостей имеет вид [10]

$$F = 4\pi\rho \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{l^2}\frac{dR_1}{dt}\frac{dR_2}{dt}$$

Среднее значение этой силы за период акустического поля T можно представить в виде

$$\overline{F} = \frac{1}{T}\int_0^T F dt$$

При этом будем считать, что l есть медленно меняющаяся функция времени t и при интегрировании вынесем её за знак интеграла

$$\overline{F} = \frac{4\pi\rho}{l^2}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{16\pi^2}\frac{dV_1}{dt}\frac{dV_2}{dt}dt$$

Здесь $V_1 = \frac{4}{3\pi} R_1^3, V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$. Будем считать, что $R_2 >> R_1$, и полость радиуса R_2 движется со скоростью $U_П$, а полость радиуса R_1 движется относительно большой полости. Присоединенная масса полости радиуса R_1 при поступательном движении равна $m_1 = \frac{2}{3}\pi\rho R_1^3 = \frac{1}{2}\rho V_1$. Под действием силы $\overline{F}$ полость радиуса R_1 будет двигаться с ускорением

$$a = \frac{\overline{F}}{\overline{m}_1},\text{ где } \overline{m}_1 = (1/2\overline{\rho}\overline{V}_1) = 1/2\rho V_{10}$$

Здесь черта над символом означает усреднение за период акустического поля T, V_{10} – равновесный объем полости, а $\rho -$ локальная плотность жидкости. Приравнивая это ускорение центростремительному, получаем

$$\frac{U_П^2}{l} = \frac{1}{2\pi l^2 V_{10} T}\int_0^T \frac{dV_1}{dt}\frac{dV_2}{dt}dt$$

Откуда

$$l = \frac{1}{2\pi V_{10} T U_П^2}\int_0^T \frac{dV_1}{dt}\frac{dV_2}{dt}dt \qquad (3)$$

Мы можем это делать, так как полость радиуса R_1 находится под действием центральной силы, обусловленной пульсациями полости радиуса R_2.

Пусть обе полости пульсируют равновесно по изотермическому закону в неоднородном акустическом поле вида

$$P = P_0 + P_m \sin\omega t \cdot \cos kx$$

Тогда $PV_1 = P_0 V_{10}, PV_2 = P_0 V_{20}$, продифференцировав эти выражения по времени, находим

$$P\frac{dV_1}{dt} + V_1\frac{dP}{dt} = 0,\quad \frac{dV_1}{dt} = -V_1\frac{\omega P_m \cos kx \cdot \sin\omega t}{P_0 + P_m \cos kx \cdot \sin\omega t}$$

аналогично

$$\frac{dV_2}{dt} = -V_2\frac{\omega P_m \cos kx \cdot \sin\omega t}{P_0 + P_m \cos kx \cdot \sin\omega t}$$

Далее, учитывая, что $PV_1 = P_0 V_{10}, PV_2 = P_0 V_{20}$,находим

$$\frac{dV_1}{dt} = -V_1\frac{\omega P_m \cos kx \cdot \sin\omega t}{P_0 + P_m \cos kx \cdot \sin\omega t}$$

(4)

$$\frac{dV_2}{dt} = -V_2 \frac{\omega P_m \cos kx \cdot \sin \omega t}{P_0 + P_m \cos kx \cdot \sin \omega t}$$

Подставляя (4) в (3) получаем, что

$$l = \frac{1}{2\pi V_{10} T U_П^2} (P_0 V_{10})(P_0 V_{20}) \omega^2 P_m^2 \cos^2 kx \int_0^T \frac{\cos^2 \omega^2 t}{(P_0 + P_m \cos kx \cdot \sin \omega t)^4} dt$$

Делаем замену переменных $\omega t = \xi$, тогда, учитывая, что $\varepsilon = P_m / P_0$

$$l = \varepsilon^2 \frac{V_{20} \omega^2}{4\pi^2 U_П^2} \int_0^{\omega T} \frac{\cos^2 \xi}{(1 + \varepsilon \sin \xi)^4} d\xi$$

Так как подынтегральная функция 2π – периодическая, примем $T\omega = 2\pi$ тогда

$$l = \varepsilon^2 \frac{V_{20} \omega^2}{4\pi^2 U_П^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \xi}{(1 + \varepsilon \sin \xi)^4} d\xi$$

Обозначим через

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \xi}{(1 + \varepsilon \sin \xi)^4} d\xi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^2 \xi}{(1 + \varepsilon \sin \xi)^4} d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \xi}{(1 + \varepsilon \sin \xi)^4} d\xi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \xi}{(1 + \varepsilon \sin \xi)^4} d\xi$$

Положим $\varepsilon = 2a/(1 + a^2)$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < a < 1$ откуда $a = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

Тогда

$$J_1 = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \xi}{(1 + \frac{2a}{1 + a^2} \cos \xi)^4} d\xi = \frac{2}{(1 + a^2)^4} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \xi}{1 + 2a \cos \xi + a^2} d\xi$$

И получаем, что

$$J_1 = \frac{2}{(1 + a^2)^4} B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) F(4;3;2;a^2),$$

$$B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\pi}}{1} = \frac{\pi}{2}$$

$$F(4,3,2,Z) = \frac{Z + 1}{(1 - Z)^5} .$$

И, таким образом,

$$l=\varepsilon^2\frac{V_{20}\omega^2}{4\pi^2U_П^2}\frac{2}{(1+a^2)^4}\frac{\pi}{2}\frac{a^2+1}{(1-a^2)^5}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_2^3\omega^2\varepsilon^2}{4\pi^2U_П^2(1+a^2)^3(1-a^2)^5}$$

И, тогда

$$R_{ЗАХ}=l=\varepsilon^2\frac{R_0^3\omega^2}{3U_П^2(1+a^2)^3(1-a^2)^5}$$

Для численного интегрирования системы уравнений необходимо знание мгновенного значения радиуса захвата. Повторяя те же рассуждения и не делая усреднения за период поля, мы получим, что

$$R'_{ЗАХ}=\frac{4\pi fR^2\dot{R}\varepsilon\cdot\cos 2\pi ft\cdot\cos kx}{U_П^2(1-\varepsilon\cdot\sin 2\pi ft\cdot\cos kx)}$$

Примем функцию распределения по размерам полостей в виде:

$$N(R_1)=\frac{N_0}{R_1^3(R_{\max}-R_{\min})},$$

Здесь N_0 – объемная концентрация газовых полостей в жидкости.

Подставляя значения для $R'_{ЗАХ}$ в (1), и, интегрируя по dR_1, получим поток массы газа в полость радиуса R_0, обусловленный коагуляцией

$$\frac{dm_k}{dt}=\frac{R'^2_{ЗАХ}U_П^2N_0\mu'\frac{4}{3}\pi^2}{(R_{\max}-R_{\min})BT'}[R_{\max}P_0+2\sigma(\ln R_{\max}-\ln R_{\min})]=$$
$$=\frac{64\pi^4f^2R^4\dot{R}^2\varepsilon^2\cdot\cos^2 2\pi ft\cdot\cos^2 kx\cdot N_0\mu'}{3U_П^3(1-\varepsilon\cdot\sin 2\pi ft\cdot\cos kx)^2\cdot BT'(R_{\max}-R_{\min})}\cdot \qquad (5)$$
$$\cdot[R_{\max}P_0+2\sigma(\ln R_{\max}-\ln R_{\min})]$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Обсуждение

Таким образом, зная поток массы газа в полость, обусловленный коагуляцией, мы можем написать систему уравнений динамики кавитационной полости, находящейся под действием неоднородного акустического поля в сжимаемой, вязкой жидкости, содержащей фазовые неоднородности в виде парогазовых пузырьков

$$R\ddot{R}(1-\frac{\dot{R}}{C})+\frac{3}{2}\dot{R}^2(1-\frac{\dot{R}}{3C})-\frac{U_П^2}{4}=(1+\frac{\dot{R}}{C})H+\frac{R}{C}\dot{H}(1-\frac{\dot{R}}{C}) \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{2}{3}\rho\pi R^3(U_П-v)]=-D(U_П-v)-\frac{4}{3}\pi R^3\frac{dP_\infty}{dx} \qquad (7)$$

$$\frac{dR_0}{dt} = \frac{\dfrac{dm_k}{dt}}{\dfrac{3}{4}\pi\dfrac{\mu'}{BT'}(3P_0R_0^2 + 4\sigma R_0)} \qquad (8)$$

Здесь $C = C_\infty[(P+B')/(P_\infty + B')]^{(n-1)/2n}$ - локальная скорость звука в жидкости,

$C_\infty^2 = [n(P_\infty + B')/\rho'$ - скорость звука на бесконечности,

$H = \frac{C_\infty^2}{n-1}[(\frac{P+B'}{P_\infty + B'})^{(n-1)/2n} - 1]$ - удельная энтальпия на границе пузырька,

$P = P_Г - 2\sigma/R - (4\mu\dot{R}/R) + P_d$ - давление на границе пузырька,

$P_Г = P_{Г0}(R_0/R)^{3\gamma} = (P_0 + 2\sigma/R_0 - P_d)(R_0/R)^{3\gamma}$ - давление газа внутри пузырька, $P_{Г0}$ – давление газа внутри равновесного пузырька, P_d - давление насыщенных паров внутри пузырька, B' и n –константы уравнения состояния жидкости в форме Тэта, равные для воды - $B' = 3\cdot 10^8\,Па,\;\; m = 7$, $\rho'-$ плотность жидкости, $\nu-$ скорость жидких частиц. $D = 6\pi\mu R(1+0.065\,\mathrm{Re}^{2/3})^{3/2}$ - коэффициент, характеризующий вязкое сопротивление поступательному движению пузырька, $\mathrm{Re} = [(U_П - \nu)2\rho R/\mu$ - число Рейнольдса, $\gamma-$показатель политропы содержимого полости.

Систему уравнений (6) –(8) можно интегрировать при следующих начальных условиях

$$R(0) = R_{00},\; U = \dot{R}(0) = 0,\; x(0) = \lambda/8.$$

$$R_0(0) = R_{00}, U_П(0) = 0.$$

Поток массы газа в полость приводит к увеличению ее равновесного радиуса R_0 и, следовательно, к изменению ее резонансных свойств.

Поступательное перемещение полости из-за неоднородности поля давления приводит к тому, что [11]

- она медленно в среднем перемещается в пучность или в узел давления, или совершает крупномасштабные пространственные осцилляции в зависимости от параметров самой полости и внешнего акустического поля. На резонансной кривой это перемещение аналогично переходу с одной резонансной кривой на другую. А это меняет резонансное поведение пузырька [12].
- пульсации полости нестационарны и промодулированы сложной временной функцией.

Поток массы газа в полость за счет коагуляции приводит к тому, что:

- равновесный радиус полости R_0 увеличивается; скорость роста равновесного радиуса полости $U_П$ зависит от концентрации «зародышей кавитации» N_0.
- изменения равновесного радиуса полости R_0 при ее радиальных пульсациях аналогичны переходу с одной резонансной кривой на другую. А это, в свою очередь,

приводит к резкому изменению ее резонансных свойств и, следовательно, к изменению характера ее пульсаций.

Выводы и заключение

Практически все проявления кавитации обусловлены тем, что относительно низкая средняя плотность энергии переменных полей давления трансформируется в высокую плотность энергии в очень маленьком объеме внутри и вблизи захлопывающегося пузырька.

Акустические излучающие системы формируют вблизи себя неоднородные акустические поля, которые, которые действуют на паро-газовые микронеоднородности, называемые «зародышами кавитации». Эти зародыши пульсируют, перемещаются поступательно под действием градиента акустического поля; взаимодействуют друг с другом под действием сил Бьеркнесса и коагулируют; при достаточной величине акустического поля начинается процесс направленной диффузии растворенного в жидкости газа внутрь пузырька. Таким образом, акустическое поле формирует область насыщенную пузырьками, что приводит увеличению рассеяния звуковой энергии на этих пузырьках.

Следовательно, изучение движения пузырьков, находящихся под действием переменных полей давления является одной из важных задач при исследовании кавитационных процессов.

Полученная система уравнений (6) - (8) позволяет достаточно подробно исследовать динамику кавитационной полости в поле стоячей звуковой волны. Изменение равновесного радиуса полости в результате коагуляции приводит к изменению ее резонансных свойств, а это приводит к изменению характера ее пульсаций, в том числе и к появлению хаотических пульсаций. Так в динамике кавитационных полостей проявляется динамических хаос.

В заключение отметим, что в эту систему уравнений можно включить процесс направленной (выпрямленной) диффузии, добавив в числитель уравнения (8) член, учитывающий изменение массы газа в полости за счет этого процесса.

Список литературы:

1. Перник А.Д. Проблемы кавитации.//Л., «Судостроение», 1968. 440 С.
2. Капустина О.А. Дегазация жидкостей. // В кн.: «Физические основы ультразвуковой технологии, ч. IV, под ред. Л.Д. Розенберга. М., «Наука», 1970, С. 235 – 336.
3. Ильичев В.И. О влиянии коагуляции зародышей на кавитационную прочность жидкости.// Акуст. ж., 1967, т.13, №2, С. 300 - 301.
4. Токмаков П.Е., Гурбатов С.Н., Диденкулов И.Н., Прончатов-Рубцов Н.В. О влиянии акустического поля на пространственное распределение газовых пузырьков в резонаторе // Вести ННГУ. Сер. Радиофизика. 2006. №1(4). С.31-40
5. Тихонов В.А., Диденкулов И.Н., Прончатов-Рубцов Н.В. Численное моделирование движения газовых пузырьков в проточном резонаторе // Акуст. журн. 2013. Т.59. С. 445-451
6. Викулова Т.С., Диденкулов И.Н., Кулинич В.В., Прончатов-Рубцов Н.В., Сахаров Д.В. Пузырьки в прочном акустическом резонаторе // Акуст. журн. 2023. Т.69. С. 7-12
7. Казанцев В.Ф. Движение газовых пузырьков в жидкости под действием сил Бьеркнесса, возникающих в акустическом поле // Докл. АН СССР, 1959, 129, 1, С.64 -67.
8. Агрест Э.М., Кузнецов Г.Н. Исследование текущих параметров движения кавитационного пузырька в неоднородном звуковом поле // // Акустический журнал, 1973, Т. 19, № 3, С.321-326.

9. Корец В.Л. Возникновение и развитие кавитационной области в градиентных акустических полях // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Владивосток, 1983, 233 С.

10. Bjerknes C.A. Hidrodinamische Fernkrafte, Leipzig, 1915.

11. Агрест Э.М., Корец В.Л. Крупномасштабные пространственные осцилляции кавитационной полости в звуковом поле. // Акустический журнал, 1978, Т. 24, № 1, С.1-9.

12. Ilyichev V.I, Korets V.L. and Melnikov N.P. Spectral characteristics of acoustic cavitation // Ultrasonics, 1989, vol. 27, № 6, pp. 357 – 361

Translational motion of the cavitation bubble taking into account coagulation

N.P. Melnikov

Abstract. The paper presents a model of coagulation under the action of Bjerkness forces pulsating in an inhomogeneous acoustic field, cavitation bubbles. To account for the effect of changes in the equilibrium radius of the bubble due to coagulation on its translational motion and on its radial pulsations, a system of three ordinary nonlinear differential equations is proposed.

Keywords: cavitation bubble, coagulation of cavitation bubbles, Bjerkness force.