

УДК 517.925/926

Белых Владимир Николаевич^{1,2}, профессор, д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», главный научный сотрудник кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского,

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

Гречко Дина Алексеевна^{1,2}, аспирант кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», младший научный сотрудник передовой инженерной школы ННГУ им. Лобачевского,

e-mail: dina.grechko@unn.ru

Барабаш Никита Валентинович^{1,2}, к. ф.-м. н., ассистент кафедры математики ФГБОУ ВО «ВГУВТ», доцент кафедры ТУДС ИИТММ ННГУ им. Лобачевского,

e-mail: barabash@itmm.unn.ru

¹ Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.

² Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

ЛОКАЛИЗАЦИЯ АТТРАКТОРОВ В МНОГОМЕРНОМ ДИФФЕОМОРФИЗМЕ С ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Аннотация. Рассматривается многомерный диффеоморфизм с одной нелинейностью. Доказано, что существует область параметров, для которой рассматриваемое отображение имеет аттрактор. В качестве конкретного примера рассмотрено многомерное отображение Эно, для которого доказано существование области локализации, содержащей аттрактор.

Ключевые слова: диффеоморфизм, аттрактор, многомерное отображение Эно.

Рассматривается отображение $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ вида

$$F: \begin{cases} \bar{x} = f(x) + \sum_{i=1}^n y_i, \\ \bar{y}_1 = bx, \\ \bar{y}_{i+1} = a_i y_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^1$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $f(x)$ — непрерывная гладкая функция, параметры $b, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ удовлетворяют условиям:

$$|a_i| \leq a \leq 1, \quad |b| < 1, \quad |b| + a < 1. \quad (2)$$

Мы используем норму вида

$$\|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i| \quad (3)$$

Введем области в \mathbb{R}^{n+1} $D_\beta = \{x, y \mid |x| \leq \beta, \|y\| \leq \gamma\}$ и $D = \{x, y \mid x \in \mathbb{R}^1, \|y\| \leq \gamma\}$.
Справедлива

Лемма 1. Если выполняются условия

$$\beta > 0, \quad \gamma = k\beta, \quad k \triangleq \frac{|b|}{1-a}, \quad (4)$$

то образ области D_β под действием отображения (1) лежит в D , т.е. $FD_\beta \subset D$.

Далее γ удовлетворяет условию (4). Введем два вспомогательных одномерных отображения

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f(x) + \gamma \triangleq f^+(x), \\ \bar{x} &= f(x) - \gamma \triangleq f^-(x).\end{aligned}\tag{5}$$

Лемма 2. Область D_β инвариантна, т.е. $FD_\beta \subset D_\beta$, если выполняются следующие неравенства

$$f^-\left(\frac{y_1}{b}\right) \leq x \leq f^+\left(\frac{y_1}{b}\right), \quad |y_1| \leq \beta|b|,\tag{6}$$

$$\|y\| \leq \frac{\beta|b|}{1-a}.\tag{7}$$

Теорема 1. Пусть существует параметр β , определяющий область D_β , которая удовлетворяется Лемме 1 и Лемме 2. И пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x)| < \beta - \gamma, \quad x \in [-\beta, \beta].\tag{8}$$

Тогда отображение (1) имеет аттрактор A , лежащий в области D_β , т.е. $A \subset D_\beta$.

В качестве примера диффеоморфизма с одной нелинейностью рассмотрим многомерное отображение Эно, которое определяется отображением (1) с функцией $f(x)$ вида

$$f(x) = \mu - x^2.\tag{9}$$

Тогда в виду Леммы 2 и Теоремы 1 справедлива

Теорема 2. Пусть параметр μ удовлетворяет условию

$$0 < \mu \leq 2 \left(1 - \frac{|b|}{1-a}\right)^2.\tag{10}$$

и область D_β , определяющаяся параметрами

$$\beta = \frac{\mu(1-a)}{1-a-|b|}, \quad \gamma = \frac{\mu|b|}{1-a-|b|},\tag{11}$$

инвариантна, т.е. $FD_\beta \subset D_\beta$. Тогда образом отображения (1), (9) является подкова (6), (7), (9), лежащая в прообразе D_β и содержащая аттрактор A отображения (1), (9).

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-21-00553).

Список литературы:

1. M. Hénon, A two-dimensional mappings with a strange attractor // Commun. Math. Phys, 1976, 50(1), pp. 69-77.
2. V.N. Belykh, Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map // Sb. Math. – 186:3 (1995), 311–326
3. Белых, В.Н., Барабаш, Н.В., Гречко, Д.А., Мордвинкина, И.А. Новый взгляд на многомерное отображение Эно // Великие реки - 2020 : Труды 22-го международного научно-промышленного форума, Нижний Новгород, 27–29 мая 2020 года. – Нижний Новгород: Волжский государственный университет водного транспорта, 2020. – С. 75.– Режим доступа: <http://вф-река-море.рф/>
4. Белых В. Н., Гречко Д. А. Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра // Динамические системы. – 2018. – Т. 8. – №. 4. – С. 373-383.
5. Varabash N. V., Belykh V. N. Chaotic driven maps: Non-stationary hyperbolic attractor and hyperchaos // The European Physical Journal Special Topics. – 2020. – Т. 229. – №. 6. – С. 1071-1081
6. Vladimir N Belykh, Nikita V Varabash, Dina A Grechko. Existence proofs for strange attractors in piecewise-smooth nonlinear Lozi-Hénon and Belykh maps // Journal of Difference Equations and Applications – 2023. – С. 1-21



LOCALIZATION OF ATTRACTORS IN A MULTIDIMENSIONAL DFFEOMORPHISM WITH ONE NONLINEARITY

Vladimir N. Belykh, Dina A. Grechko, Nikita V. Barabash

Abstract. A multidimensional diffeomorphism with one nonlinearity is considered. It is proved that there is a domain of parameters for which the map has an attractor. As an example, we considered the multidimensional Hénon map, for which the existence of a domain containing an attractor is proved.

Keywords: diffeomorphism, attractor, multidimensional Hénon map.

