

УДК 531.19

Меньшенина Алевтина Владимировна¹, старший преподаватель
e-mail: alya112@yandex.ru

¹ Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМ С УДАРАМИ ПОСЛЕ БИФУРКАЦИИ, ПРИВОДЯЩЕЙ К ХАОТИЧЕСКИМ ДВИЖЕНИЯМ

Аннотация. В работе изучается бифуркация периодического движения с бесконечным числом ударов за период в динамических системах с ударными взаимодействиями. В результате этой бифуркации образуются инвариантные множества аналогичные по свойствам «подковам Смейла». В малой окрестности этих множеств существуют хаотические движения, которые могут быть описаны с помощью непериодических числовых последовательностей.

Ключевые слова: динамические системы с ударами, хаотические движения, подковы Смейла, символическая динамика.

Динамические системы с ударами рассматриваются при исследовании механизмов, которые применяются для вибротранспортировки, виброзабивки свай, бурения грунтов, гашения высокочастотных колебаний, виброударных испытаний и многих других. В таких системах могут возникать хаотические режимы, которые приводят к снижению надежности и эффективности работы этих механизмов.

В докладе изучается один из путей к хаосу в динамических системах с ударными взаимодействиями. Для рассматриваемой системы возможно следующее описание [1]. На гиперповерхности удара $x_n = 0$ переменные x_1, x_2, \dots, x_{n-1} меняются по формулам:

$$\begin{aligned}x_1^+ &= x_1^- H_{11}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-, \mu), \\x_i^+ &= x_i^- + x_1^- H_{1i}(x_1^-, \dots, x_{n-1}^-, \mu), \quad i = \overline{2, n-1},\end{aligned}$$

при $x_n > 0$, между соударениями, движение описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \Phi_i(x_1, \dots, x_n, \mu), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{x}_n &= x_1 \Phi_{n1}(x_1, \dots, x_n, \mu) + x_n \Phi_{nn}(x_1, \dots, x_n, \mu).\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения: μ - параметр системы, x_i^- - значения переменных до удара, $x_i^+, i = \overline{1, n-1}$, - после удара. На функции наложены ограничения

$H_{11}(x_1^-, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-, \mu) \leq 0$, $-1 < H_{11}(0, x_2^-, \dots, x_{n-1}^-, \mu) < 0$, $\Phi_{n1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \mu) > 0$. Предполагается, что в описанной системе существуют локальные особенности [1] третьего, четвертого, пятого и шестого типов. В них выполняются условия: $x_n = 0, \dot{x}_n = 0, \ddot{x}_n > 0$ (третьего типа), $x_n = 0, \dot{x}_n = 0, \ddot{x}_n < 0$ (четвертого типа), $x_n = 0, \dot{x}_n = 0, \ddot{x}_n = 0, \dddot{x}_n > 0$ (пятого типа), $x_n = 0, \dot{x}_n = 0, \ddot{x}_n > 0$ (шестого типа).

Для изучения траекторий указанной динамической системы применяется метод точечных отображений [2], то есть рассматривается только гиперповерхность удара $x_n = 0$, и отображение Т переводит точку $(x_1 \geq 0, x_2^1, \dots, x_{n-1}^1, 0)$ в точку $(x_1 > 0, x_2^2, \dots, x_{n-1}^2, 0)$.

Обрами локальных особенностей третьего типа из малой окрестности особенности пятого типа после применения отображения T^{-i} , $i=1,2,\dots$, являются [1] множества γ_i , последовательность множеств γ_i при $i \rightarrow \infty$ сходится к множеству γ_* . Множество γ_* представляет собой границу области бесконечноударных движений (БУД), то есть [3] движений с бесконечным числом ударов за конечное время (для таких режимов также используется название “стук”). Часть многообразия, ограниченного множествами γ_i и γ_{i+1} , в малой окрестности локальной особенности шестого типа обозначается через D_i .

В описанной системе может происходить [4] бифуркация периодического движения с бесконечным числом ударов за период. Это периодическое движение выходит из точки, соответствующей локальной особенности пятого типа, затем после одного удара попадает в область БУД. Момент бифуркации связан с приходом движения на границу этой области. После бифуркации вместо периодического движения с участком БУД могут появляться хаотические движения.

В результате бифуркации на многообразии $x_n = 0, x_1 \geq 0$ могут возникать [4] инвариантные множества, похожие по виду и свойствам на подковы Смейла. Образуются эти множества при наложении образа множества D_N (при некотором значении N) при действии отображения T^{N+1} на само множество D_N . При этом пересечении выполняется равенство $T^{N+1}D_N \cap D_N = P_1 \cup P_2$. Доказано [4], что появление подков Смейла в динамических системах с ударами приводит к возникновению хаотических движений, то есть нерегулярных движений с чувствительной зависимостью от начальных условий. Движения, существующие в малой окрестности подков Смейла, могут быть описаны символическими последовательностями, каждый элемент которых равен одному из двух чисел «1» или «2», причем «1» соответствует попаданию фазовой точки в множество P_1 , а «2» - в множество P_2 .

Возможна ситуация, при которой подкова Смейла не образуется, но при пересечении множества D_N и его образа $T^{\alpha(N+1)}D_N$, при некоторых значениях N и α , могут образовываться [5] множества с большим числом пересечений - кратные подковы Смейла. В этом случае также доказано возникновение хаотических движений, для которых возможно описание непериодическими символическими последовательностями, каждый элемент которых равен одному из трех и более чисел, в зависимости от конфигурации пересечения множеств D_N и $T^{\alpha(N+1)}D_N$.

Список литературы:

1. Горбиков С.П. Локальные особенности динамических систем с ударными взаимодействиями // Вестн. Нижегород. гос. ун-та. Сер. мат. моделир. и опт. упр. Н.Новгород: изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 2001. – № 2. – С. 103-116.
2. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1972. – 471 с.
3. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. – Москва: Наука, 1985. – 200 с.
4. Горбиков С. П., Меньшенина А.В. Бифуркация, приводящая к возникновению хаотических движений в динамических системах с ударными взаимодействиями // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 8. – С. 1046-1052.
5. Горбиков С. П., Меньшенина А.В. Возникновение хаотических движений в случае существования кратных подков Смейла в динамических системах с ударными взаимодействиями // Вестн. Нижегород. гос. ун-та. Сер. мат. моделир. и опт. упр. Н.Новгород: изд-во Нижегород. гос. ун-та. – 2004. – Вып. 1(27). – С. 14-24.



SYMBOLIC DYNAMICS IN DYNAMIC SYSTEMS WITH IMPACTS AFTER THE BIFURCATION LEADING TO CHAOS

Alevtina V. Mensheninna

Abstract. The bifurcation of periodic motion with an infinite number of impacts per period in dynamic systems with impacts is studied in the paper. As a result of this bifurcation, invariant sets similar in properties to the Smale horseshoes appear. Chaotic motions exist in a small neighborhood of these sets and can be described by non-periodic numerical sequences.

Keywords: dynamic systems with impacts, chaotic motions, Smale horseshoes, symbolic dynamics.

