ISBN 978-5-901722-84-8
3 [2023]
ТРАНСПОРТ. ГОРИЗОНТЫ РАЗВИТИЯ

УДК 517.9

Барабаш Никита Валентинович[1,2], к.ф.-м.н., ассистент кафедры математики ВГУВТ, доцент кафедры теории управления и динамики систем ННГУ им. Н.И. Лобачевского,
e-mail: barabash@itmm.unn.ru
Бакалина Дарья Александровна[1], студентка 4 курса ННГУ им. Н.И. Лобачевского,
e-mail: darya.bakalina@gmail.com

[1] Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.
[2]Волжский государственный университет водного транспорта, г. Нижний Новгород, Россия.

ДИНАМИКА КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ СЕДЛОВОЙ ВЕЛИЧИНЕ

Аннотация. В работе рассматриваются бифуркации в кусочно-линейной системе лоренцевского типа при отрицательной седловой величине. Приводится численное сопоставление бифуркаций в этой системе с бифуркациями в системе Любимова-Закса. Показано, что в обеих системах переход к хаосу происходит через каскад чередующихся гомоклинических бифуркаций седла и бифуркаций “вилка” устойчивых предельных циклов, приводящих к удвоению периода устойчивых периодических орбит с их последующим раздваиванием.

Ключевые слова: динамическая система, странный аттрактор Лоренца, система Любимова-Закса, бифуркации, кусочно-линейная система, гомоклиническая орбита.

Рассматривается трёхмерная кусочно-линейная система, склеенная из трех линейных подсистем A_s, A_l и A_r [1 – 3]

$$A_s: \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -\alpha y, \\ \dot{z} = -\nu z, \end{cases} \qquad A_{l,r}: \begin{cases} \dot{x} = -\lambda(x \pm 1) + \omega(z - b), \\ \dot{y} = -\delta(y \pm 1), \\ \dot{z} = -\omega(x \pm 1) - \lambda(z - b), \end{cases} \tag{1}$$

где α, δ, ν, ω, λ, b — положительные параметры. Системы $A_{s,r,l}$ определены в смежных областях фазового пространства $G_s = \{|x| < 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b,\}, G_l = \{x \le -1, z \le b; x \le -1, z > b, y \le 0, x < 1, z > b, y < 0\}$ и $G_r = \mathbb{R}^3 \backslash \{G_s \cup G_l\}$ соответственно.

Система (1) позволяет в силу линейности подсистем аналитически построить двумерное отображение Пуанкаре. В работе [1] показано, что это отображение имеет треугольную форму, что позволяет свести его исследование к исследованию одномерного отображения вида

$$\bar{x} = f(x) = \begin{cases} 1 - \gamma + \gamma x^{\nu}, \ x > 0, \\ \gamma - 1 - \gamma |x|^{\nu}, x < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\gamma = be^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}$.

Параметр ν играет роль седлового индекса и в данной работе удовлетворяет неравенству $\nu > 1$, что соответствует отрицательной седловой величине. В отличие от случая $\nu < 1$, рассмотренного в [1], при $\nu > 1$ реализуется сценарий рождения аттрактора через каскад чередующихся гомоклинических бифуркаций седла и бифуркаций “вилка” устойчивых предельных циклов, приводящих к удвоению периода устойчивых периодических орбит с их последующим раздваиванием (Рисунок 1).

По одномерному отображению была построена расширенная бифуркационная диаграмма (Рисунок 1), на которой отмечены основные бифуркации: сечение (a) соответствует существованию в системе устойчивых состояний равновесия $e_{r,l}$, сечение (b) – бифуркации типа Андронова-Хопфа, сечение (c) – предельным циклам периода 1, приближающимся к устойчивому двумерному многообразию седла при увеличении γ, сечение (d) – гомоклинической бабочке периода 1, сечение (g) – устойчивому предельному циклу типа “восьмерки”, сечение (e) – бифуркации вилка “восьмерки”, сечение (f) – гомоклинической бабочке периода 2, сечение (h) – квазистранному аттрактору лоренцевского типа.

В работе численно показано, что этот сценарий аналогичен переходу к хаосу в системе Любимова-Закса [4]

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y + \sigma y D(z - r), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \tag{3}$$

Для системы (3) численно была построена расширенная бифуркационная диаграмма (Рисунок 2), основные бифуркации которой имеют аналоги на диаграмме для системы (1) (Рисунок 1).

Таким образом, на основании качественно-численного исследования утверждается, что кусочно-линейная система (1) подобна нелинейной системе лоренцевского типа по набору основных свойств и сценарию рождения аттракторов. Однако, в отличие от своего гладкого аналога, кусочно-линейная модель позволяет проводить полное аналитическое исследование.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

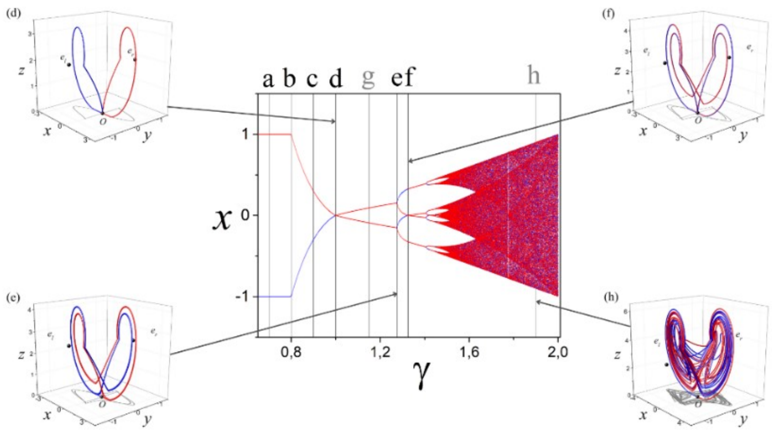

Рисунок 1 – Расширенная бифуркационная диаграмма системы (1) и соответствующие фазовые портреты (см. описание в тексте), построенная по одномерному отображению (2). Красными и синими точками изображены разные притягивающие множества.

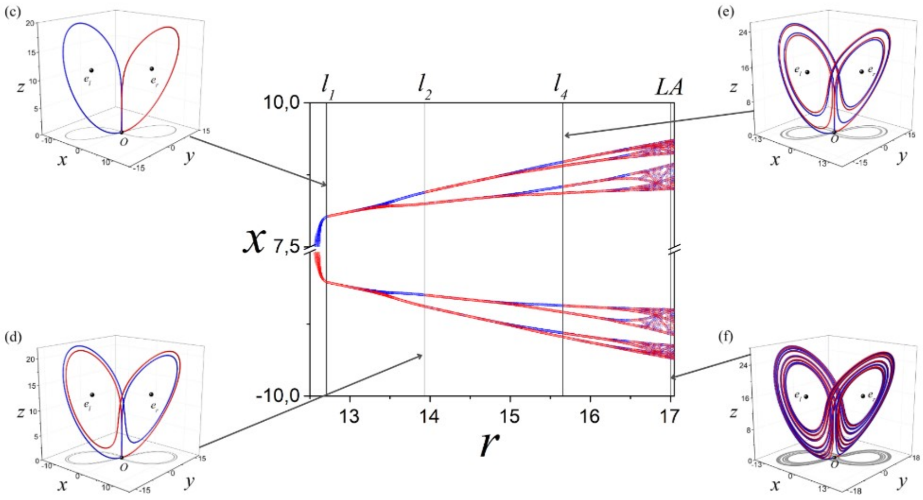

Рисунок 2 – Бифуркационная диаграмма для системы (3) и соответствующие фазовые портреты.

Красными и синими точками изображены разные притягивающие множества.

Список литературы:

1. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019. – Т. 29. – №. 10. – С. 103108.

2. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – Т. 31. – №. 4. – С. 043117.

3. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Bifurcations of chaotic attractors in a piecewise smooth Lorenz-type system //Automation and Remote Control. – 2020. – Т. 81. – №. 8. – С. 1385-1393.

4. Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1983. – Т. 9. – №. 1-2. – С. 52-64.

DYNAMICS OF A LORENZ-TYPE PIECEWISE-SMOOTH SYSTEM WITH A NEGATIVE SADDLE VALUE

Nikita V. Barabash, Darya A. Bakalina

Abstract. We consider bifurcations in a piecewise-smooth Lorenz-type system with a negative saddle value. A numerical comparison of bifurcations in this system with bifurcations in the Lyubimov-Zaks system is given. It is shown that in both systems the transition to chaos occurs through a cascade of alternating homoclinic saddle bifurcations and pitchfork bifurcations of stable limit cycles, leading to a period and orbit doubling.

Keywords: dynamical system, Lorenz strange attractor, Lyubimov-Zaks system, bifurcations, piecewise-smooth system, homoclinic orbit.