УДК 517.9

КУСОЧНО-ГЛАДКИЕ МОДЕЛИ ХАОТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Барабаш Никита Валентинович[1], кандидат физико-математических наук, доцент
e-mail: barabash@itmm.unn.ru
Белых Владимир Николаевич[1], профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики
e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

[1] Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. Рассматриваются трёхмерные кусочно-гладкие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, служащие моделями известных гладких динамических систем с хаотическими аттракторами. Показано, что модели позволяют проводить полное аналитическое исследование хаотических аттракторов, что недоступно для их гладких систем-прообразов. Приведены основные результаты этих исследований.

Ключевые слова: кусочно-гладкая динамическая система, хаос, аттрактор, бифуркация, отображение Пуанкаре.

PIECEWISE-SMOOTH MODELS OF CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS

Barabash Nikita Valentinovich[1], Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor
e-mail: barabash@itmm.unn.ru
Belykh Vladimir Nikolaevich[1], Professor, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Head of the Department of Mathematics
e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

[1] Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. Three-dimensional piecewise smooth systems of ordinary differential equations are considered, serving as models of well-known smooth dynamical systems with chaotic attractors. It is shown that such models allow for a complete analytical study of chaotic attractors, which is inaccessible for their smooth counterparts. The main results of these studies are presented.

Keywords: piecewise-smooth dynamical system, chaos, attractor, bifurcation, Poincaré map.

Кусочно-гладкие динамические системы вызывают значительный интерес специалистов в области прикладной математики благодаря широкому распространению в природе и технике явлений переключений, ударов и других резких изменений [1]. Однако и для «чистой» динамики такие системы играют важную роль, обладая серьёзным преимуществом перед гладкими аналогами: будучи построенными «правильным» образом, они позволяют проводить строгое исследование их хаотических аттракторов и глобальных бифуркаций, а также обнаруживать новые динамические эффекты и объекты.

Это преимущество было продемонстрировано авторами настоящей статьи в ряде работ [2 – 5], посвященных кусочно-гладким моделями двух наиболее популярных хаотических систем – Лоренца и Чуа. Здесь мы приводим краткий обзор основных результатов работ [2, 5].

Кусочно-гладкая модель системы Лоренца

Рассмотрим трёхмерную кусочно-гладкую систему ОДУ, составленную из трёх линейных подсистем A_s, A_l и A_r [2]

$$A_s : \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -\alpha y, \\ \dot{z} = -\nu z, \end{cases} \qquad A_{l,r} : \begin{cases} \dot{x} = -\lambda(x \pm 1) + \omega(z - b), \\ \dot{y} = -\delta(y \pm 1), \\ \dot{z} = -\omega(x \pm 1) - \lambda(z - b), \end{cases} \tag{1}$$

где параметры *ω, λ, b, α, δ, ν* выбраны положительными. Системы $A_{s,r,l}$ заданы в непересекающихся областях фазового пространства $G_s = \{|x| < 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b,\}, G_l = \{x \leq -1, z \leq b; x \leq -1, z > b, y \leq 0, x < 1, z > b, y < 0\}$ и $G_r = \mathbb{R}^3 \backslash \{G_s \cup G_l\}$ соответственно.

Система (1) замечательна тем, что её двумерное отображение Пуанкаре, полученное явно как композиция решений (1), имеет треугольную форму. Это свойство позволяет свести его к одномерному кусочно-непрерывному отображению вида

$$\bar{x} = (1 - \gamma + \gamma |x|^{\nu}) \operatorname{sign} x, \tag{2}$$

где $\gamma = b e^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}$.

С помощью отображения (2) для системы (1) был доказан маршрут бифуркаций коразмерности 1, численно наблюдаемый в оригинальной системе Лоренца и приводящий к рождению странного аттрактора (см. рис. 1). Это первое и единственное на сегодняшний день доказательство рождения странного аттрактора лоренцевского типа в системе ОДУ, проведённое без использования асимптотических методов.

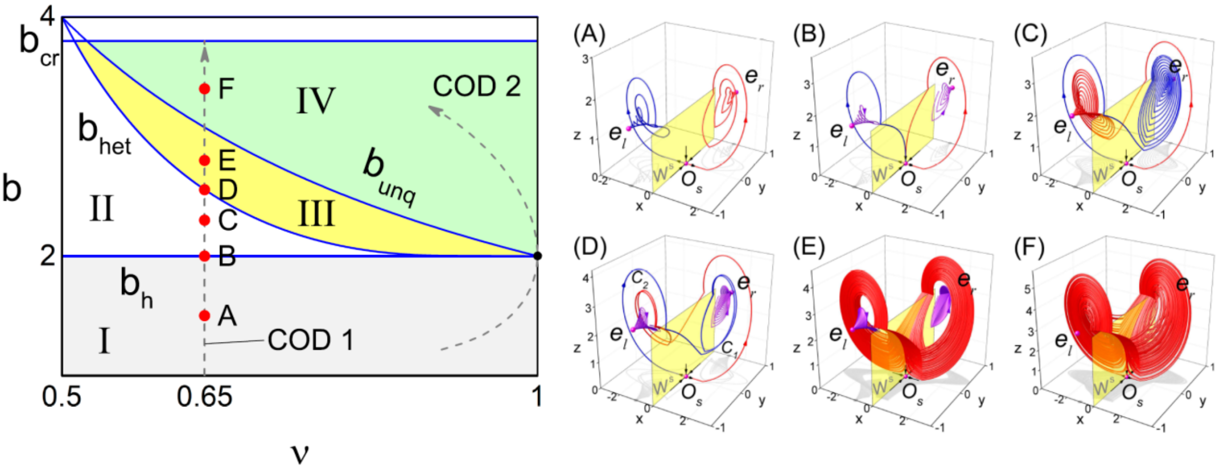

Рисунок 1 – Бифуркационная диаграмма и фазовые портреты системы (1). Обозначения портретов (A) – (F) соответствуют красным точкам A – F на диаграмме. В областях параметров III и IV система имеет странный аттрактор [2]

Кусочно-гладкая система с двойной спиралью

Трёхмерная кусочно-гладкая система с двойной спиралью (система типа Чуа) получена из линейных подсистем A_0, A_l и A_r вида

$$A_s:\begin{cases}\dot{x}=x,\\ \dot{y}=-\nu y+\omega z,\\ \dot{z}=-\omega y-\nu z,\end{cases}\qquad A_{l,r}:\begin{cases}\dot{x}=-\alpha(x+h)-\Omega(z+1),\\ \dot{y}=-\beta y,\\ \dot{z}=\Omega(x+h)-\alpha(z+1),\end{cases}\tag{3}$$

где параметры β, ν, h, α, ω и Ω заданы положительными, а области фазового пространства G_0, G_l и G_r для некоторого параметра $r>1$ заданы как $G_0=\{|x|<h,(y^2+z^2\le r^2)\cap(|z|<1)\}$, $G_l=\{(z\le -sign\,x, y\in\mathbb{R}^1)\setminus G_0\}$ и $G_r=\mathbb{R}^3\setminus\{G_s\cup G_l\}$.

В работе [5] (см. Теорему 2) доказано, что для некоторой области параметров объединение $D=D_l\cup D_r$ прямоугольников $D_{l,r}=\{|x|<h, y^2+1\le r^2, z=\mp1\}$ образует глобальную секущую Пуанкаре для любого аттрактора системы (3). Выбор D в качестве секущей позволяет получить её отображение T в себя как композицию решений линейных подсистем (3). Отображение принимает явный вид

$$T:\quad\begin{aligned}\bar{x}&=\mu\operatorname{sign}x+(1-\mu)|x|^{\nu}(y\sin\omega\ln|x|+z\cos\omega\ln|x|),\\ \bar{y}&=q|x|^{\nu}(y\cos\omega\ln|x|-z\sin\omega\ln|x|),\\ \bar{z}&=\operatorname{sign}x,\end{aligned}\tag{4}$$

где $\frac{x}{h}\to x$, $\mu=1-\frac{1}{h}e^{-\frac{3\pi\alpha}{2\Omega}}$, $q=e^{-\frac{3\pi\beta}{2\Omega}}$.

Отображение (4) имеет хаотический аттрактор с двойной спиралью. Приведённое в работе [5] доказательство такого аттрактора для конкретной динамической системы, по всей видимости, уникально. Однако наиболее интересный результат относится к его структуре. В [5] было показано, что вопреки распространённому мнению сложность аттрактора с двойной спиралью больше связана с периодическими и бесконечными цепями подков Смейла в его структуре, нежели с гомоклинической орбитой седлофокуса (см. рис. 2).

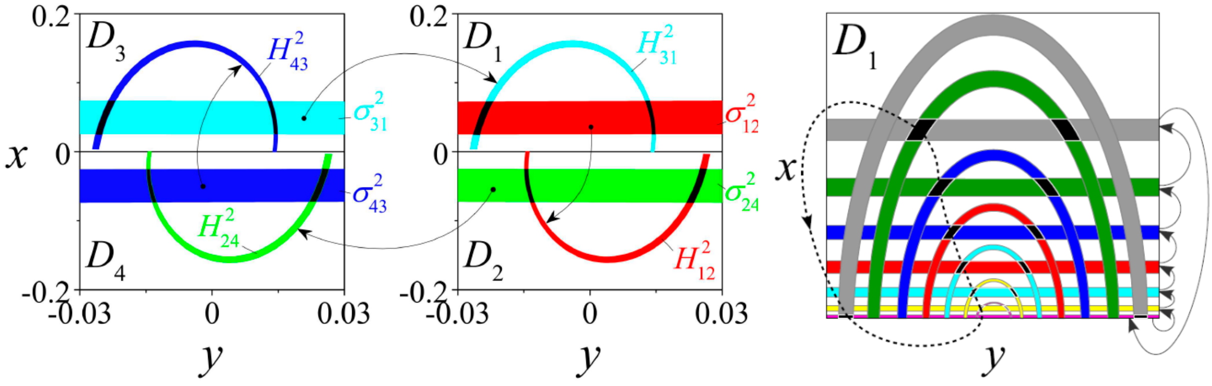

Рисунок 2 – Цепи подков периода 4 в отображении T (слева) и пример бесконечной цепи (справа) (см. подробности в работе [5])

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00420).

Список литературы:

1. Belykh I., Kuske R., Porfiri M., Simpson D. J. W. Beyond the Bristol book: Advances and perspectives in non-smooth dynamics and applications // Chaos. – 2023. – Т. 33. – №. 1. – С. 010402.

2. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // Chaos. – 2019. – Т. 29. – №. 10. – С. 103108.

3. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. Bifurcations of chaotic attractors in a piecewise smooth Lorenz-type system //Automation and Remote Control. – 2020. – Т. 81. – №. 8. – С. 1385-1393.
4. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // Chaos. – 2021. – Т. 31. – №. 4. – С. 043117.
5. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. The hidden complexity of a double-scroll attractor: Analytic proofs from a piecewise-smooth system // Chaos. – 2023. – Т. 33. – №. 4. – С. 043119.