

УДК 517.925/926

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТТРАКТОРОВ И РЕПЕЛЛЕРОВ В ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТИМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Суроегина Анастасия Евгеньевна¹, преподаватель

e-mail: nsuroegina@mail.ru

Белых Владимир Николаевич¹, профессор, доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математики

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

¹ Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. Рассматривается трехмерная обратимая динамическая система с непрерывным временем и цилиндрическим фазовым пространством, моделирующая динамику системы фазовой автоподстройки. Показано сосуществование аттрактора и репеллера, содержащих седло-фокусы и переходящих один в другой при сдвиге переменной и замене времени на обратное. Численно найдены области параметров, для которых многообразия аттрактора и репеллера имеют пересечения.

Ключевые слова: обратимая динамическая система, аттрактор, репеллер, гомоклиническая орбита.

INTERACTION OF ATTRACTORS AND REPELLERS IN A THREE-DIMENSIONAL REVERSIBLE DYNAMICAL SYSTEM

Suroegina Anastasia Evgenevna¹, Lecture

e-mail: nsuroegina@mail.ru

Belykh Vladimir Nikolaevich¹, Professor, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Head of the Department of Mathematics

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

¹ Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. A three-dimensional reversible dynamic system with continuous time and cylindrical phase space is considered. This system models the dynamics of a phase-locked loop system. The existence of two symmetrical saddle-focus fixed points is the reason of the attractor and repeller to be chaotic. Due to reversibility the attractor and the repeller change their mutual position under a coordinate shift and the direction of time. The parameter regions for which the attractor and the repeller manifolds have intersections are numerically determined.

Keywords: reversible dynamic system, attractor, repeller, homoclinic orbit.

В большом многообразии динамических систем выделяют особый тип – обратимые динамические системы. Динамическая система называется обратимой, если она инвариантна относительно изменения времени на обратное. Основным примером таких систем служат гамильтоновы системы. Например, гамильтонова система второго порядка

вида:
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$
 имеет интеграл $H(x, y) = const$, независимо от изменения времени в

прямом или обратном направлении.

В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = \gamma - \lambda \cdot \cos x \cdot z - \lambda \cdot y - \sin x, \end{cases} \quad (1)$$

полученная из уравнения $\ddot{x} + \lambda \cdot \cos x \cdot \dot{x} + \lambda \cdot \dot{x} + \sin x = \gamma$ заменой $\dot{x} = y$ и $\dot{y} = z$.

Дивергенция векторного поля системы (1), $div F = -\lambda \cos x$, меняет знак, и в равной степени расширяет и сжимает объемы на интервалах $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ на окружности.

Данная система (1) задана в цилиндрическом фазовом пространстве $x \in S^1, y, z \in R^2$ и обладает следующими свойствами:

1. Система (1) инвариантна относительно замены $\tilde{x} = \pi - x$ и $\tilde{t} = -t$, то есть является обратимой системой со сдвигом.

Простейшим одномерным аналогом такой системы является уравнением системы фазовой автоподстройки частоты:

$$\dot{x} + a \cdot \sin x = \gamma \quad (2)$$

Динамика этого уравнения проста: при $|\gamma| < 1$ окружность целиком притягивается устойчивым равновесием, исключая неустойчивую точку равновесия. При замене $\tilde{x} = \pi - x$ и $\tilde{t} = -t$ неустойчивое равновесие становится устойчивым, а устойчивое – неустойчивым.

2. При $\gamma = 0$ система (1) имеет два состояния равновесия: $O_1 = (0; 0; 0), O_2 = (\pi; 0; 0)$.

3. Тип равновесия O_1 имеем следующий характеристический многочлен $(S + 1)(S^2 + (\lambda - 1) \cdot S + 1) = 0$, для которого собственными значениями служат: $S_1 = -1, S_{2,3} = \frac{1-\lambda}{2} \pm \frac{\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2}$. При этом в зависимости от параметра λ получаем следующие случаи:

Таблица 1

Зависимость собственных значений от параметра λ для O_1

$\lambda < -1$	$\lambda = 1$	$-1 < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < 3$	$\lambda = 3$	$\lambda > 3$
$S_1 = -1,$ $S_2, S_3 > 0$	$S_1 = -1,$ $S_2, S_3 = 1$	$S_1 = -1,$ $Re(S_2) > 0,$ $Re(S_3) > 0$	$S_1 = -1,$ $S_2 = i$ $S_3 = -i$	$S_1 = -1,$ $Re(S_2) < 0,$ $Re(S_3) < 0$	$S_1 = -1,$ $S_2, S_3 = -1$	$S_1 = -1,$ $S_2, S_3 < 0$

4. Тип равновесия O_2 имеем немного другой характеристический многочлен или $(S - 1)(S^2 + (1 - \lambda) \cdot S + 1) = 0$, для которого уже собственными значениями являются: $S_1 = 1, S_{2,3} = \frac{\lambda-1}{2} \pm \frac{\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2}$. При этом в зависимости от параметра λ получаем следующие случаи:



Зависимость собственных значений от параметра λ для O_2

$\lambda < -1$	$\lambda = 1$	$-1 < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < 3$	$\lambda = 3$	$\lambda > 3$
$S_1 = 1,$ $S_2, S_3 < 0$	$S_1 = 1,$ $S_2, S_3 = -1$	$S_1 = 1,$ $Re(S_2) < 0,$ $Re(S_3) < 0$	$S_1 = 1,$ $S_2 = i$ $S_3 = -i$	$S_1 = 1,$ $Re(S_2) > 0,$ $Re(S_3) > 0$	$S_1 = 1,$ S_2, S_3 $= -1$	$S_1 = 1,$ $S_2, S_3 > 0$

Из таблиц 1, 2 следует, что состояние равновесия O_1 является седло-фокусом при $-1 < \lambda < 1$. Его касательное одномерное неустойчивое многообразие определяется собственным вектором $V_1(1, -1, 1)$, а касательное двумерное устойчивое многообразие есть плоскость с нормалью $N(1, \lambda - 1, 1)$. Состояние равновесия O_2 является симметричным седло-фокусом с устойчивым одномерным и неустойчивым двумерным многообразиями.

Система (1) при определенных значениях параметров имеет гетероклинические орбиты соединяющие состояния равновесия O_1 и O_2 , что приводит к образованию периодической по x связке, окрестность которой содержит хаотическое множество траекторий, подобное множеству при бифуркации гомоклинических орбит седло-фокуса [1 – 3].

Для данной системы было проведено численное моделирование.

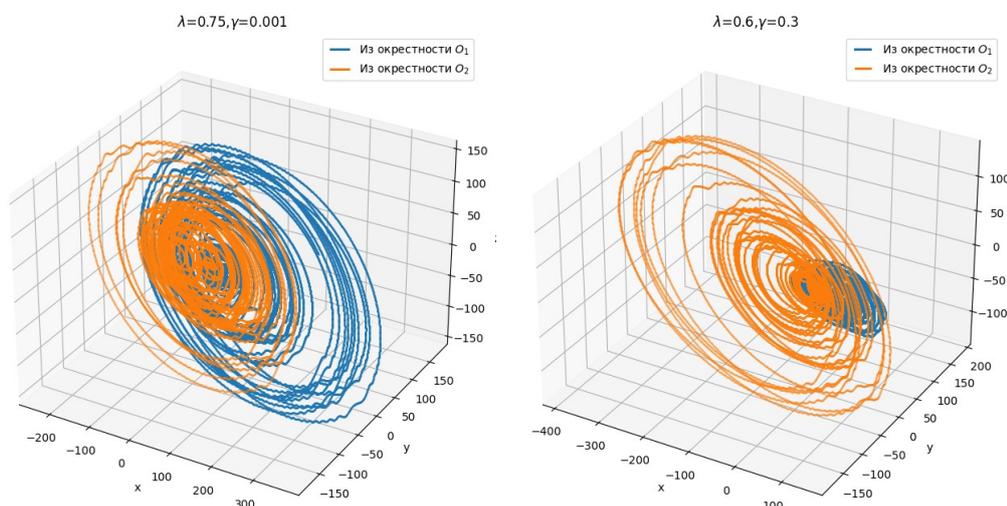


Рисунок 1 – Траектории с начальными условиями из окрестности O_1 в прямом времени и из окрестности O_2 – в обратном

Из приведенного численного эксперимента можно заключить, что поведение траекторий системы (1) носит колебательный характер в плоскости (y, z) и вращательный характер по фазовой переменной x . Такое поведение следует из того, что система (1), преобразованная к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\lambda y - \sqrt{1 + \lambda^2 z^2} \cdot \sin(x + \arctg \lambda z), \end{cases} \quad (3)$$

по переменным y и z содержит линейную часть в виде осциллятора.

Из проведенных численного исследования системы (1) в прямом и обратном времени следует, что траектории аттрактора могут быть сколь угодно близки к траекториям репеллера, подобно тому, как это происходит в системах со смешанной динамикой [4].

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 24-21-00420).

Список литературы:

1. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // Докл. АН СССР к СССР. – 1965. – Т. 160. – №3. – С. 558 – 561.
2. Arneodo A. Possible new strange attractors with spiral structure / A. Arneodo, P. Couillet, C. Tresser // Communications in Mathematical Physics. – 1981. – Vol. 79, No. 4. – P. 573-579.
3. Belykh, V. N., Barabash N. V., Belykh I. The hidden complexity of a double-scroll attractor: Analytic proofs from a piecewise-smooth system // Chaos. – 2023. – Vol. 33, No. 4. – P. 043119
4. Гонченко С. В. О трех типах динамики и понятии аттрактора / С. В. Гонченко, Д. В. Тураев // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2017. – Т. 297. – С. 133.

