4 [2024]
ISBN 978-5-901722-87-9
ТРАНСПОРТ. ГОРИЗОНТЫ РАЗВИТИЯ

УДК 517.925/926

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОДКОВ СМЕЙЛА В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ДВОЙНОЙ СПИРАЛЬЮ СЕДЛО-ФОКУСА

Белых Владимир Николаевич[1], профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики
e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

[1] Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. Работа служит обобщением отдельных результатов работы [1], в которых проведено нелокальное исследование аттракторов в системах, имеющих состояние равновесия типа седло-фокус с двумя симметричными гомоклиническими орбитами. Показано, что аттракторы таких систем порождаются множеством эллиптических и гиперболических, периодических и бесконечных цепей подков Смейла.

Ключевые слова: подкова Смейла, седло-фокус, аттрактор, динамический хаос.

ELLIPTICAL AND HYPERBOLIC SMALE HORSESHOE CHAINS IN DYNAMICAL SYSTEMS WITH A SADDLE-FOCUS DOUBLE SCROLL

Belykh Vladimir Nikolaevich[1], Professor, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Head of the Department of Mathematics
e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

[1] Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The work serves as a generalization of individual results of [1], in which a non-local study of attractors in systems having a saddle-focus equilibrium points with two symmetric homoclinic orbits was carried out. It is shown that the attractors of such systems are generated by a set of elliptical and hyperbolic, periodic and infinite chains of Smale horseshoes.

Keywords: Smale's horseshoe, saddle-focus, attractor, dynamical chaos.

В 1960 году американский математик Стив Смейл придумал отображение [2], которое преобразует прямоугольник в наложенный на него растянутый и согнутый четырёхугольник, названный подковой. Оказалось, что это отображение имеет бесконечное множество неблуждающих траекторий, которое является грубым, то есть сохраняется при возмущениях. Это удивительное открытие (все считали, что такого быть не может!) явилось началом теории динамического хаоса – направления, развивавшегося по сей день практически во всех областях естествознания.

Одним из «кирпичиков» в построении этой теории явилась получившая мировую известность теорема нижегородского математика Л.П. Шильникова [3] о хаосе в окрестности гомоклинической спирали седо-фокуса. Было получено, что отображение последования Пуанкаре по траекториям в этой окрестности содержит бесконечное число подков Смейла. Позже эта теорема использовалась при доказательстве хаотической динамики в знаменитой электрической цепи Чуа [4] (Chua Circuit), моделируемой системой с двойной спиралью седло-фокуса. Сложная структура аттракторов в различных системах такого типа широко обсуждается в мировой литературе [5], однако полного ответа на вопрос о чрезвычайной запутанности траекторий в фазовом пространстве таких систем отсутствовала. В недавней работе [1] нам удалось получить ответ на этот вопрос.

Адекватное описание хаотических множеств траекторий дают предложенные в [1] цепи подков Смейла. Эти цепи есть последовательности четырехугольных полосок таких, что на каждую последующую из них накладывается подковообразный образ предыдущей. Отображение, порождаемое траекториями системы с двойной спиралью седло-фокуса, имеет вид:

$$\begin{gathered} \bar{x} = |x|^{\nu}(y\, sin(\omega \ln|x|) + z\cos(\omega \ln|x|)), \\ \bar{y} = q|x|^{\nu}(y\cos(\omega \ln|x|) - z\, sin(\omega \ln|x|)), \\ \bar{z} = \mathrm{sing}(x). \end{gathered} \tag{1}$$

Утверждения

1) Отображение (1) имеет бесконечное множество периодических и бесконечных цепей подков Смейла;

2) Максимальный аттрактор отображения (1) полностью определяется неблуждающими траекториями множества цепей подков Смейла;

3) Эллиптические цепи определяют множество устойчивых циклов больших периодов с малыми областями притяжения, лежащих в минимальном аттракторе и соответствующих *наблюдаемому* хаосу;

4) Гиперболические цепи порождают бесконечное множество седловых орбит, соответствующих *математическому* хаосу;

5) Периодические и двоякоасимптотические гиперболические орбиты определяют механизмы разбегания седловых траекторий, перемешивание и их случайное блуждание между устойчивыми длиннопериодными циклами.

Следует отметить, что строгий анализ нелокального поведения траекторий оказался возможным благодаря удачному выбору исходных кусочно-линейной системы ОДУ, отражающей все основные свойства гладких систем с двойной спиралью.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 24-21-00420).

Список литературы:

1. Belykh, V. N., Barabash N. V., Belykh I. The hidden complexity of a double-scroll attractor: Analytic proofs from a piecewise-smooth system // Chaos.– 2023. – Vol. 33, No. 4. – P. 043119.

2. Smale S. Differentiable Dynamical Systems // Bull. Am. Math. Soc. –1967.– Vol.73, No. 6. – P. 747-817.

3. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // Докл. АН СССР к СССР. – 1965. – Т. 160. – №3. – С. 558 – 561.

4. Chua L., Komuro M., and Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Trans. Circuits Syst. –1986.– Vol.33, No. 11. – P. 1072 - 1118.

5. Fortuna L., Frasca M, Xibilia M. G. Chua's Circuit Implementations: Yesterday, Today and Tomorrow // World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. – 2009. – Vol. 65.