УДК 517.925/926

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОДКОВ СМЕЙЛА В МНОГОМЕРНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЭНО С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Гречко Дина Алексеевна[1], ассистент кафедры
e-mail: d.grechko.18@gmail.com

[1] Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. В работе рассматривается многомерное отображение Эно с кусочно-гладкой нелинейностью, исследованию которого посвящено большое количество работ как в России, так и зарубежом. Кусочно-гладкая нелинейность позволяет доказывать не только обычные свойства динамического хаоса, но и принципиально важное свойство гиперболичности. В частности, это свойство позволяет строить инвариантные меры Синая-Боуэна-Рюэля. В работе для различных кусочно-линейных функций дано доказательство существования аттракторов, траектории которых гиперболичны.

Ключевые слова: динамические системы, отображение Эно, взаимодействующие подковы Смейла, гиперболичность.

HYPERBOLICITY OF INTERACTING SMALE HORSESHOE IN A MULTIDIMENSIONAL HENON MAP WITH PIECEWISE SMOOTH NONLINEARITY

Grechko Dina Alekseevna[1], Assistant at the Department
e-mail: d.grechko.18@gmail.com

[1] Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The paper considers the multidimensional Hainault map with piecewise smooth nonlinearity, the study of which has been the subject of a large number of works both in Russia and abroad. Piecewise smooth nonlinearity makes it possible to prove not only the usual properties of dynamic chaos, but also the fundamentally important property of hyperbolicity. In particular, this property allows us to construct invariant Sinai-Bowen-Ruel measures. In this work, for various piecewise linear functions, a proof of the existence of attractors whose trajectories are hyperbolic is given.

Keywords: dynamic systems, Henon map, interacting Smale horseshoes, hyperbolicity.

В работе рассматривается $(n+1)$-мерное отображение вида [1]:

$$F\colon \begin{array}{l} \bar{x} = f(x) + \mathbf{1}y, \\ \bar{y} = \mathbf{b}x + Ay, \end{array} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^1, y = column(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$;

1 – единичный вектор-строка длинной n;

$f(x)$ – кусочно-линейная функция;

$\mathbf{b} = column(b, 0, 0, \ldots, 0)$, b – параметр;

$A = \left[a_{ij}\right]_n^n$ – нормализованная нижне-сдвиговая матрица размерности $(n \times n)$ с элементами $a_{ij} = a_j \delta_{i,j+1}$,

где a_j – параметры;

$\delta_{i,j+1}$ – символ Кронекера. Черта над переменной означает следующую итерацию.

Пусть

$$|b| \ll 1, \qquad |a_j| < a < 1, j = \overline{1, n-1}. \tag{2}$$

При $b \ll 1$ динамика отображения (1) близка к динамике одномерного отображения [2].

Введем области $D_\sigma = D_x \times D_y$ и $D = \bar{D}_x \times D_y$, где $D_x = \{\sigma^- < x < \sigma^+\}$, $\bar{D}_x = \{x \in \mathbb{R}^1\}$ и $D_y = \{\|y\| < \gamma\}$ для некоторых $\sigma^-, \sigma^+, \gamma > 0$. Пусть $\sigma = \max\{|\sigma^-|, |\sigma^+|\}$.

Лемма 1. Пусть параметр γ, определяющий область D_y, равен

$$\gamma = \frac{\sigma |b|}{1 - a}. \tag{3}$$

Тогда образ FD_σ лежит в D, т.е. $FD_\sigma \subset D$.

Следствие 1. Из Леммы 1 следует, что для $(x, y) \in D_\sigma$, т.е. для $\sigma^- < x < \sigma^+$ и $\|y\| < \gamma$ отображение $(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$f(x) - \|y\| < \bar{x} < f(x) + \|y\|, \qquad \|y\| < \gamma. \tag{4}$$

Следствие 2. Для любых $(x, y) \in D_\sigma$, отображение координат удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} f(x) - \gamma = f^-(x) < \bar{x} < f^+(x) = f(x) + \gamma, \\ \bar{y} \in D_y, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} x \mapsto f(x) - \gamma \triangleq f^-(x), \\ x \mapsto f(x) + \gamma \triangleq f^+(x) \end{gathered} \tag{6}$$

– одномерные отображения сравнения.

Рассмотрим кусочно-гладкую функцию $f(x)$ в следующем виде:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1, & \tilde{x}_1 \le x < \tilde{x}_2; \\ -\alpha_2 x + \beta_2, & \tilde{x}_2 \le x < \tilde{x}_3; \\ \alpha_3 x + \beta_3, & \tilde{x}_3 \le x < \tilde{x}_4; \\ -\alpha_4 x + \beta_4, & \tilde{x}_4 \le x < \tilde{x}_5; \\ \ldots \end{cases} \qquad |f'(x)| > 1 \tag{7}$$

Тогда, отображения сравнения (6) имеют вид

$$\bar{x} = f^\pm(x) \triangleq \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 \pm \gamma, & \tilde{x}_1 \le x < \tilde{x}_2; \\ -\alpha_2 x + \beta_2 \pm \gamma, & \tilde{x}_2 \le x < \tilde{x}_3; \\ \alpha_3 x + \beta_3 \pm \gamma, & \tilde{x}_3 \le x < \tilde{x}_4; \\ -\alpha_4 x + \beta_4 \pm \gamma, & \tilde{x}_4 \le x < \tilde{x}_5; \\ \ldots \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим интервал $[\tilde{x}_1; \tilde{x}_4]$. Выберем область D_x так, что σ^- – неподвижная точка отображения $\bar{x} = f^-(x)$, $\tilde{x}_1 \le x < \tilde{x}_2$, σ^+ – неподвижная точка отображения $\bar{x} = f^+(x)$, $\tilde{x}_3 \le x < \tilde{x}_4$ (см. Рисунок 1).

Обозначим

$$x_{\max} = \operatorname*{argmax}_{\tilde{x}_1 \le x \le \tilde{x}_3} f^-(x). \tag{9}$$

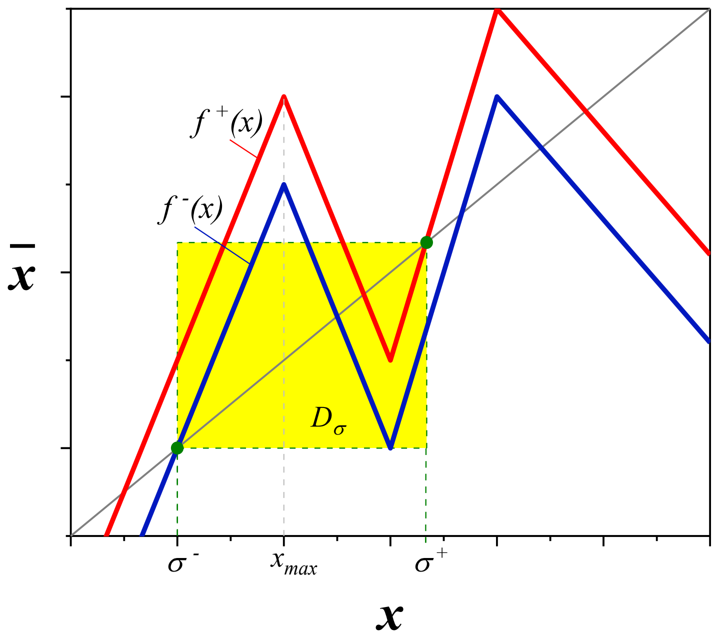

Рисунок 1 – Пример отображений сравнения (8) отображения Эно (1) с кусочно-гладкой нелинейностью (7)

Теорема 1. Если образ $f^{-}(x_{\max}) > \sigma^{+}$, то $FD_\sigma \not\subset D$, что является критерием рождения топологической подковы Смейла многомерного отображения Эно с кусочно-гладкой нелинейностью.

Анализ отображения (1), (7) показывает:

1. Данное отображение имеет 2 подковы
2. Взаимное расположение точек (границ интервалов) соответствует тому, что $FI_1 \cap I_2 \neq 0, FI_2 \cap I_1 \neq 0$. Что, в свою очередь, является критерием взаимодействия этих двух подков Смейла многомерного отображения (см. Рисунок 2).

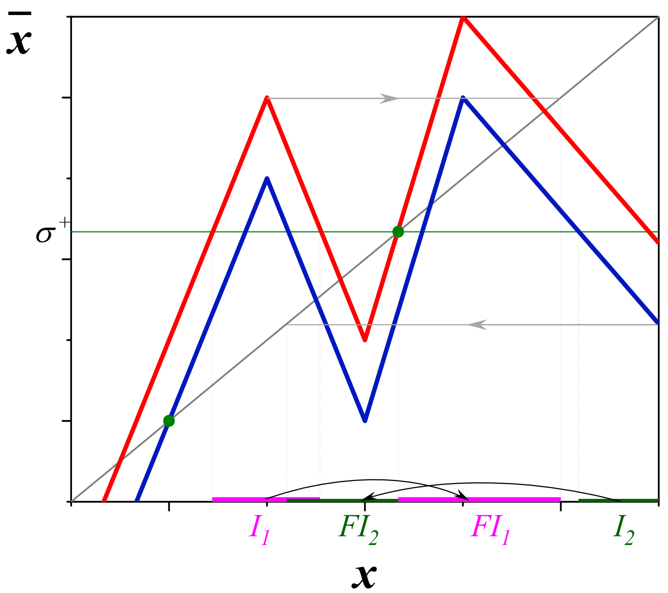

Рисунок 2 – Пример взаимодействия двух подков Смейла в многомерном отображении Эно (1) с кусочно-гладкой нелинейностью (7)

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 24-21-00420).

Список литературы:

1. Grechko D.A., Belykh V.N., Barabash N.V. Existence of an attractor and Horseshoe in multidimensional Henon map //arXiv preprint arXiv:2212.06672. – 2022.

2. Belykh V.N., Barabash N.V., Grechko D.A. From 1D Endomorphism to Multidimensional Hénon Map: Persistence of Bifurcation Structure //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2024. – Т. 34. – №. 02. – С. 2450026-1 – 2450026-15.