

УДК 534.222

## ВЛИЯНИЕ ВЫПРЯМЛЕННОЙ ДИФФУЗИИ НА РЕЗОНАНСНУЮ ДИНАМИКУ КАВИТАЦИОННЫХ ПУЗЫРЬКОВ

Мельников Николай Павлович<sup>1</sup>, доцент, кандидат физико-математических наук  
e-mail: [kaf\\_phys@vsuwt.ru](mailto:kaf_phys@vsuwt.ru)

Нюркин Александр Олегович<sup>1</sup>, студент  
e-mail: [sasha\\_nurkin@rambler.ru](mailto:sasha_nurkin@rambler.ru)

<sup>1</sup> Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

**Аннотация.** В работе рассматривается динамика одиночного кавитационного пузырька, пульсирующего сжимаемой вязкой жидкостью, в которой растворен газ, под действием синусоидального однородного акустического поля. Показано, что рост равновесного радиуса пузырька за счет выпрямленной диффузии приводит к его резонансному возбуждению при некоторых значениях равновесного радиуса, а также к изменению характера его пульсации в процессе роста.

**Ключевые слова:** динамика кавитационного пузырька.

## THE EFFECT OF RECTIFIED DIFFUSION ON THE RESONANT DYNAMICS OF CAVITATION BUBBLES

Melnikov Nikolay Pavlovich<sup>1</sup>, Associate Professor, Candidate of Physics and Mathematics Sciences

e-mail: [kaf\\_phys@vsuwt.ru](mailto:kaf_phys@vsuwt.ru)

Nyurkin Alexander Olegovich<sup>1</sup>, Student

e-mail: [sasha\\_nurkin@rambler.ru](mailto:sasha_nurkin@rambler.ru)

<sup>1</sup> Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

**Abstract.** The paper considers the dynamics of a single cavitation bubble pulsating with a compressible viscous liquid in which a gas is dissolved under the action of a sinusoidal homogeneous acoustic field. It is shown that the growth of the equilibrium radius of the bubble due to rectified diffusion leads to its resonant excitation at certain values of the equilibrium radius, as well as to a change in the nature of its pulsation during growth.

**Keywords:** dynamics of the cavitation bubble.

Переменные поля давления в жидкости приводят к пульсациям мельчайших пузырьков, называемых обычно «зародышами кавитации», которые всегда присутствуют в реальных жидкостях. При этом давление и температура внутри пузырька при определенных условиях становятся настолько высокими, что пузырек начинает светиться (явление

сонолюменисценции) и излучать ударные волны. Такая трансформация сравнительно низкой плотности энергии переменных полей давления в высокую плотность энергии схлопывающихся пузырьков обеспечивает все явления, присущие кавитации. Таким образом, динамика кавитационных пузырьков является одной из основных проблем кавитации.

При воздействии на пузырек вынуждающей силы с частотой близкой к частоте линейного резонанса  $f_0$ , или с частотами  $f = nf_0/m$  (где  $n$  и  $m$  – простые целые числа) пульсации пузырька принимают резонансный характер. Соотношение  $n/m$  называют порядком резонанса, при этом пузырек совершает  $n$  пульсаций за  $m$  периодов возбуждающего поля. С увеличением амплитуды возбуждающего поля основной резонанс (порядок 1/1) смещается в область низких частот и на резонансной кривой (зависимость максимального радиуса  $R^+$ , достигаемого пузырьком при пульсациях, от частоты возбуждающего поля) появляются дополнительные нелинейные резонансы различных порядков, то есть пузырек ведет себя как нелинейная колебательная система. Таким образом, характер пульсаций пузырьков, а, следовательно, и характер их взаимодействия с акустическим полем будет существенно зависеть от соотношения начального радиуса  $R_0$  и частоты акустического поля  $f$ , а также от амплитуды  $P_m$ . [1 – 3]. Период свободных колебаний пузырька определяется величиной его равновесного радиуса  $R_0$ . Все процессы в кавитационной области, приводящие к изменению равновесного радиуса пузырька, приводят к изменению его резонансных свойств. Это, в свою очередь, приводит к изменению характера его пульсаций, следовательно, к изменению характера его акустического излучения и спектра этого излучения.

Во всех реальных жидкостях находятся молекулы растворенных газов. В 1961 году Hsieh D.Y. и Plesset M.S. опубликовали статью с изложением теории «выпрямленной» (направленной) диффузии растворенного в жидкости газа в пузырек. В дальнейшем эта теория была развита в трудах Eller A.I., Crum L.A., Strasberg M., Safar M.H., Капустиной А.О. и другими и экспериментально подтверждена в работе [2].

Рассмотрим движение одиночного кавитационного пузырька, пульсирующего под действием однородного акустического поля в сжимаемой вязкой жидкости, в которой растворен газ. Пульсации такого пузырька хорошо описывает уравнение Джилмора [1]:

$$R \ddot{R} + \frac{2}{3} \dot{R}^2 + \frac{4}{3} C \dot{R} + \frac{2}{3} C^2 R = \frac{2}{3} C^2 R_0 + \frac{2}{3} C^2 R_0^2 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2k} \quad (1)$$

Здесь  $R$  – текущий радиус полости;

$\dot{R} = U = dR / dt$  – скорость движения границы полости;

$t$  – время;

$C$  – локальная скорость звука;

$H$  – удельная энтальпия на границе полости.

$\left[ \frac{(P+B)/(P_\infty+B)}{(P_0+B)/(P_\infty+B)} = \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^k \right]$  – уравнение состояния жидкости в форме Тэта;

$C = C_\infty \left[ \frac{(P+B)/(P_\infty+B)}{(P_0+B)/(P_\infty+B)} \right]^{(k-1/2k)}$  – локальная скорость звука;

$C_\infty = [k(P_\infty+B)/\rho_\infty]^{1/2}$  – скорость звука в невозмущенной жидкости;

$P_\infty = P_0 - P_m \sin 2\pi ft$  – давление в жидкости на бесконечности;

$P_0$  – статическое давление;

$\rho_\infty$  – плотность жидкости вдали от пузырька;

$P_m$  и  $f$  – амплитуда и частота внешнего звукового поля;

$P = P_g - 2\sigma/R - 4\mu U/R$  – давление жидкости на границе пузырька;

$P_g = P_{g0} (R_0/R)^{3\gamma}$  – давление газа внутри пузырька;



$P_{g_0} = P_0 + 2\sigma / R$  – давление газа в равновесном пузырьке радиуса  $R_0$  ;

$B = 3 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ,  $k = 7$  для воды – константы уравнения состояния жидкости;

$$H = \frac{C_\infty^2}{k-1} \left[ \left( \frac{P+B}{P_\infty+B} \right)^{(k-1/k)} - 1 \right] - \text{энтальпия на границе пузырька.}$$

Приводим уравнение(1) к безразмерному виду путем замены переменных  $R(t) = R(t) / R_0$  в момент времени  $t = 0$ ,  $T = f \cdot t$ ,  $\varepsilon = P_m / P_0$ . Пузырек пульсирует в воде при температуре  $28^\circ \text{ C}$ . Все процессы внутри пузырька считаем адиабатическими, то есть  $\gamma = 4/3$ . Все вычисления производились при начальных условиях:  $R(0) = R_0$ ,  $\dot{R}(0) = 0$ .

В процессе пульсаций пузырек излучает звуковые волны. Расчет звукового давления  $P_u$  проведен в работе [3].

$$P_u = (P_\infty + B) \left[ \frac{2}{k+1} + \frac{k-1}{k+1} \left( 1 + \frac{k+1}{rC_\infty^2} G \right)^{1/2} \right]^{\frac{2k}{k-1}} - B \quad (2)$$

здесь  $r$  - расстояние от центра пузырька до точки измерения, в наших расчетах  $r = 10R_0$ , а  $G$  - значение инварианта Кирквуда-Бете на границе полости, равное  $G_R(t_R) = R(H + U^2 / 2)$

В уравнении (1) величина  $R_0$  не является постоянной, а является функцией времени  $t$ , из-за явления «выпрямленной» диффузии. Поток массы газа через границу пузырька, согласно закону Фика, можно записать в виде

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi R^2 D \left( \frac{\partial C}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (3)$$

где  $m$ – масса газа, диффундирующего в пузырек;

$C$ – концентрация растворенного газа;

$D$ – коэффициент диффузии.

Начальные и граничные условия запишем в виде:

$$C(r, 0) = C_{i0}$$

$$C(R, 0) = C_{s0}$$

$$C(R, t) = C_{s0}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} C(r, t) = C_{i0}$$

Здесь  $C_{i0}$  – концентрация растворенного газа вдали от пузырька;

$C_{s0}$  – концентрация растворенного газа на границе пузырька.

Согласно [5 – 7], уравнение диффузии и уравнение (3) можно записать в виде:

$$\frac{dC}{dt} = D\Delta C \quad \frac{dm}{dt} = 4\pi R_0 D \left[ A + R_0 \left( \frac{B_d}{\pi D t} \right)^{1/2} \right] C_{s0} \left( \frac{C_{i0}}{C_{s0}} - \frac{A}{B} \right),$$

Здесь  $A = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{R}{R_0} dt$ ,  $B_d = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{R^4}{R_0^4} dt$ ,  $C_{s0} = C_{i0} \left( 1 + 2\delta / R_0 P_0 \right)$ ,  $C_{i0} = K^{-1} P_0$ ,  $K$  –

коэффициент Генри и для воды  $C_{i0} = 2.27 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$  при давлении  $P_0 = 1 \text{ атм. } (10^5 \text{ Па})$

Давление газа в пузырьке связано с массой газа соотношением:

$$m = P_{g_0} \cdot 4/3 \cdot \pi \cdot R_0^3 \cdot M' / B' T' \quad (4)$$

где  $P_{g_0} = P_0 + 2\sigma / R_0$ ,  $M' = 18$ ,  $B' = 8,3$   $T' = 298 \text{ К}^\circ$  – моль, универсальная газовая постоянная и температура  $\text{К}^\circ$ , соответственно.

Тогда, дифференцируя (4) по времени получаем

$$\frac{dm}{dt} = \pi \frac{4}{3} \frac{M'}{B' T'} (3P_0 R_0^2 + 4\sigma R_0) \frac{dR_0}{dt}$$

Отсюда находим

$$\frac{dR_o}{dt} = \frac{\frac{dm}{dt}}{\frac{4}{3}\pi(3P_o R_o^2 + 4\sigma R_o)M'/B'T'} \quad (5)$$

Система уравнений (1), (5) интегрировалась при следующих начальных условиях:

$R_o(0) = 3.5 \cdot 10^{-5}$  м,  $\varepsilon = 0.305$ ,  $f = 22100$  Гц.

Результаты расчетов приведены на Рисунке 1 и на Рисунке 2. На Рисунке 1 приведены зависимости безразмерного радиуса пузырька  $R$  от безразмерного времени  $T$ .

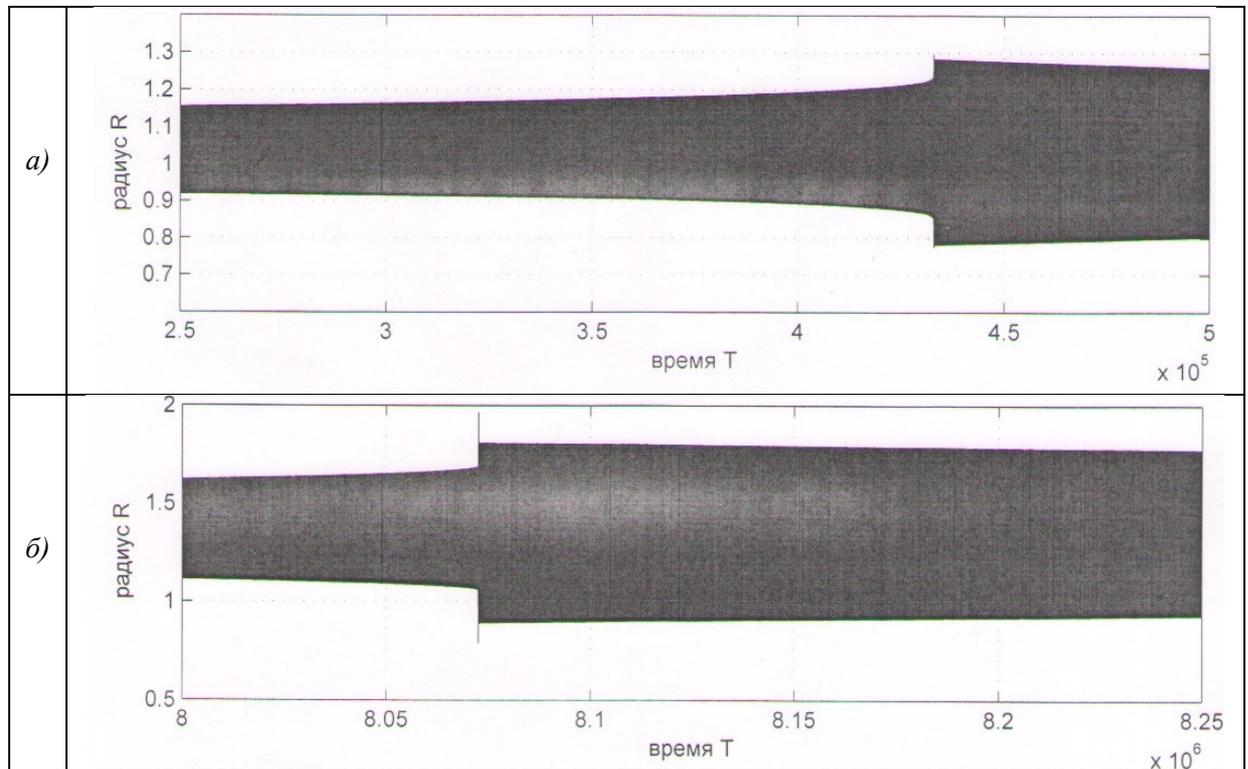


Рисунок 1 – Зависимость безразмерного радиуса пузырька  $R$  от безразмерного времени  $T$ . а) – резонанс порядка  $n/m = 4/1$  в момент времени  $T = 4.328 \cdot 10^5$ , б) – резонанс порядка  $n/m = 3/1$  в момент времени  $T = 8.0219 \cdot 10^6$ .

На Рисунке 1 а) пульсации пузырька  $R(t)$  имеют порядок  $n/m=4/1$  и в момент времени  $T=4.328 \cdot 10^5$ , пузырек, при достижении его безразмерного равновесного радиуса величины равной  $R_o=1.0218$  (радиус пузырька  $R_o=3.5763 \cdot 10^{-5}$  м), возбуждается на гармоническом резонансе порядка  $n/m=4/1$ . Амплитуда его пульсаций резко увеличивается в 1.2 раза. Затем идет медленный спад амплитуды пульсаций за время порядка 320000 периодов акустического поля. Такое поведение характерно для нелинейных динамических систем. При достижении времени порядка  $T=2.0 \cdot 10^6$ , порядок пульсаций становится равным  $n/m=3/1$ , а в момент времени  $T=8.0219 \cdot 10^6$  (Рисунок 1 б)) возбуждается гармонический резонанс порядка  $n/m=3/1$ . Амплитуда пульсаций пузырька резко увеличивается в 1.25 раз и медленно спадает в течении  $T=1.0 \cdot 10^6$  периодов внешнего акустического поля. Резонансное возбуждение происходит при  $R_o=1.3438$  (радиус пузырька  $R_o=4.7033 \cdot 10^{-5}$  м).

Анализ результатов численного интегрирования системы уравнений (1), (5) показал, что характер излучения пузырька при изменении его равновесного радиуса столь же индивидуален, сколь индивидуальны его радиальные пульсации.

На Рисунке 2 приведены слева зависимости радиальных пульсаций пузырька от времени  $R(T)$ , а справа зависимости, излученного пузырьком, давления от времени  $P_u(T)$ .

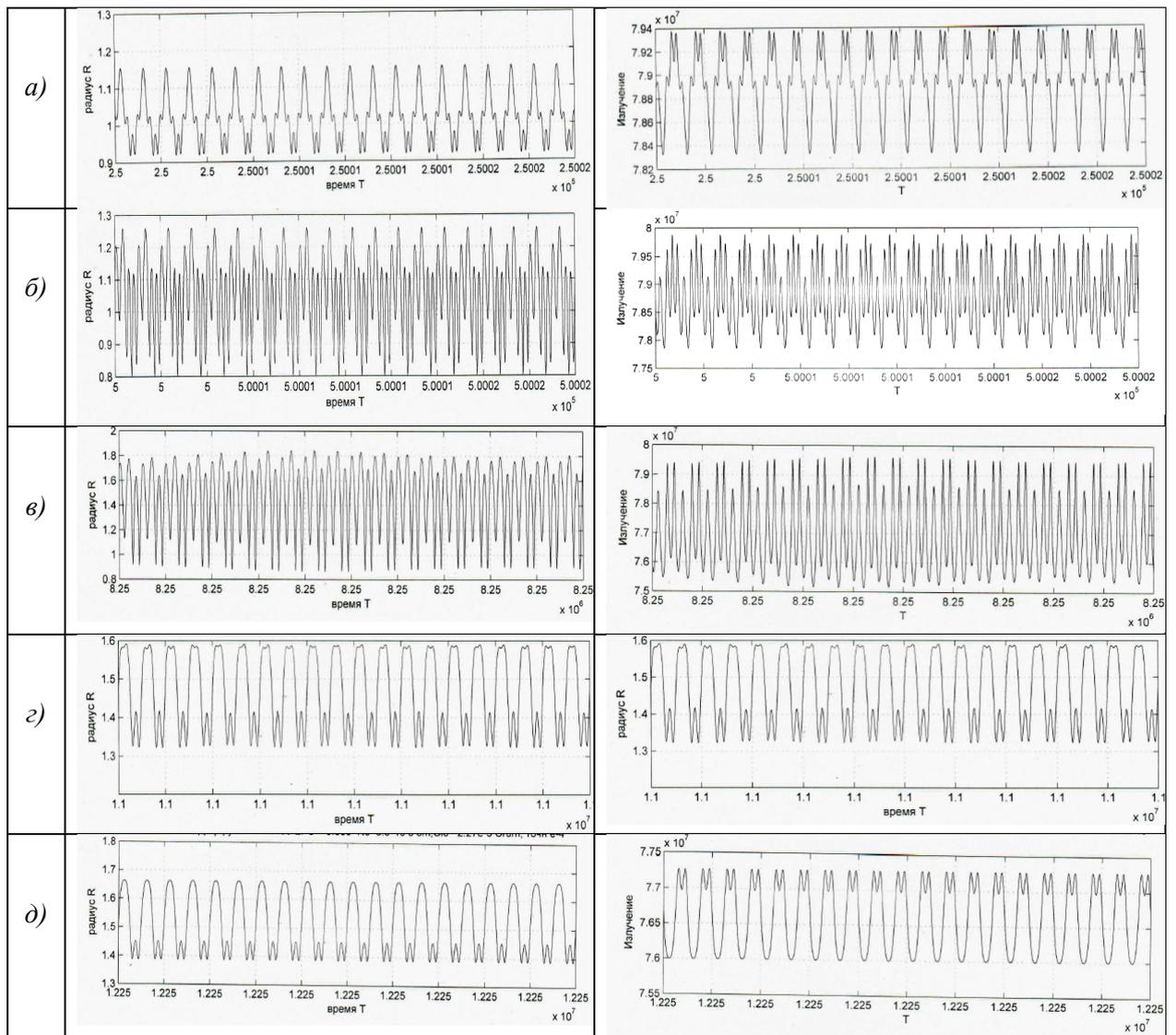


Рисунок 2 – Левая колонка – зависимость безразмерного радиуса пузырька  $R$  от безразмерного времени  $T$ . Правая колонка – зависимость безразмерного излучения  $P_u$  от безразмерного времени  $T$ .  
 а) – порядок пульсаций –  $4/1$ , б) – порядок пульсаций –  $4/1$ ,  
 в) – порядок пульсаций –  $3/1$ , г) – порядок пульсаций –  $3/1$ ,  
 д) – порядок пульсаций –  $2/1$ .

На Рисунках 2а и 2б приведены зависимости радиуса и его излучение от времени для пульсаций, порядок которого  $n/m=4/1$ . При этом характер его пульсаций и излучения существенно различны. То же самое можно сказать для зависимостей, приведенных на Рисунках 2в и 2г. Здесь порядок пульсаций равен  $n/m=3/1$ . А характер пульсаций и излучения индивидуальны. И на Рисунке 2д приведены зависимости  $R(T)$  и  $P_u(T)$  для пульсаций, порядок которых равен  $n/m = 2/1$ .

Следует отметить, что переход от порядка пульсаций одного значения к другому значению происходит путем бифуркаций удвоения периода, и, следовательно, есть область значений для  $R_0$ , в которой пульсации пузырька имеют стохастический характер [1].

Во всех реальных жидкостях растворены газы и в них находятся мельчайшие пузырьки и неоднородности, называемые «зародышами кавитации». Таким образом, в такой жидкости, находящейся под действием акустического поля, все пузырьки участвуют в процессе «направленной» или «выпрямленной» диффузии. И при значениях амплитуды

акустического поля выше некоторой критической величины, называемой порогом «выпрямленной» диффузии, начинают расти. Этот рост приводит к изменению резонансных свойств пузырьков, и, следовательно, к изменению характера их пульсаций. Что, в свою очередь, приводит к изменению характера акустического излучения пузырьков и спектров этого излучения.

**Список литературы:**

1. Plyichev V.I., Koretz V.L. and Melnikov N.P Spectral characteristics of acoustic cavitation // Ultrasonics. 1989. Vol. 27. P. 357-361.
2. Crum L.A. Measurements of the growth of air bubbles by rectified diffusion. // J. Acoust. Soc. Am., 1980, 68, P. 203--211.
3. Акуличев В.А., Богуславский Я.Я., Иоффе А.А., Наугольных К.А. Излучение сферических волн конечной амплитуды // Акустический журнал, 1967, Т. 13, № 3 С. 321-328.

