

УДК 517.925/926

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И КВАЗИСТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА

Барабаш Никита Валентинович^{1,2}, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, доцент кафедры теории управления и динамики систем

e-mail: barabash@itmm.unn.ru

Белых Владимир Николаевич^{1,2}, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики, главный научный сотрудник кафедры теории управления и динамики систем

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

¹ Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

² Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. Рассматривается конкретная трехмерная кусочно-линейная система лоренцевского типа в случаях положительной и отрицательной седловой величины. Исследуются основные бифуркации этой системы, приводящие к рождению странного аттрактора, и проводится ее сравнение с бифуркациями оригинальной гладкой модели Лоренца. Для случая отрицательной седловой величины в явной форме получен каскад бифуркаций коразмерности 1, приводящий к появлению квазистранного аттрактора. Этот каскад воспроизводит типичный бифуркационный маршрут, ведущий к рождению квазистранного аттрактора в гладких системах лоренцевского типа с отрицательной седловой величиной. Этот аналитический результат сопровождается численным сравнением с бифуркациями и аттракторами системы Лоренца-Любимова-Закса.

Ключевые слова: динамическая система, аттрактор Лоренца, отображение Пуанкаре, бифуркация, хаос.

PIECEWISE LINEAR RECONSTRUCTION OF SINGULAR HYPERBOLIC AND QUASI-STRANGE ATTRACTORS OF LORENZ TYPE

Nikita V. Barabash¹, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics

e-mail: barabash@itmm.unn.ru

Vladimir N. Belykh¹, Professor, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Head of the Department of Mathematics

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

¹ Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

² Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. A certain three-dimensional piecewise linear system of Lorenz type is considered in the cases of positive and negative saddle values. The main bifurcations of this system leading to the birth of a strange attractor are investigated and compared with bifurcations of the original smooth Lorenz model. For the case of a negative saddle value, a cascade of bifurcations of codimension 1 leading to the appearance of a quasi-strange attractor is obtained in explicit form. This cascade reproduces a typical bifurcation route leading to the birth of a quasi-strange attractor in smooth Lorenz type systems with a negative saddle value. This analytical result is accompanied by a numerical comparison with bifurcations and attractors of the Lorenz-Lyubimov-Zaks system.

Keywords: dynamical system, Lorenz attractor, Poincare map, bifurcation, chaos.

Рассмотрим кусочно-линейную (PWL) систему типа Лоренца, введенную в [1]. Система состоит из трех линейных подсистем A_s, A_l и A_r

$$A_s: \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -\alpha y, \\ \dot{z} = -\nu z, \end{cases} \quad A_l: \begin{cases} \dot{x} = -\lambda(x+1) + \omega(z-b), \\ \dot{y} = -\delta(y+1), \\ \dot{z} = -\omega(x+1) - \lambda(z-b), \end{cases} \quad A_r: \begin{cases} \dot{x} = -\lambda(x-1) + \omega(z-b), \\ \dot{y} = -\delta(y-1), \\ \dot{z} = -\omega(x-1) - \lambda(z-b), \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha, \delta, \nu, \omega, \lambda, b$ — положительные параметры. Системы $A_{s,r,l}$ определены в смежных областях фазового пространства $G_s = \{|x| < 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b\}, G_l = \{x \leq -1, z \leq b; x \geq -1, z > b, y \leq 0, x < 1, z > b, y < 0\}$ и $G_r = \mathbb{R}^3 \setminus \{G_s \cup G_l\}$ соответственно.

В [2, 3] показано, что при отсутствии скользящих движений система (1) позволяет строго получить двумерное кусочно-гладкое отображение первого возвращения Пуанкаре для секущей $\Pi: \{|x| \leq 1, |y| \leq 1, z = b\}$. Это отображение $F: \Pi \rightarrow \Pi$ имеет следующий явный вид

$$F: \begin{cases} 1 - \gamma + \gamma x^\nu, \\ 1 - q + qx^\alpha y, \end{cases} \text{ при } x > 0, \\ \begin{cases} \gamma - 1 - \gamma |x|^\nu, \\ q - 1 + q |x|^\alpha y, \end{cases} \text{ при } x < 0,$$

где $\gamma = be^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}$ и $q = e^{-\frac{3\pi\delta}{2\omega}}$. Отображение F имеет треугольную форму, т. е. первое уравнение для x не зависит от переменной y и является фактор-отображением. При этом отображение F является сжимающим вдоль y . Этот факт позволяет свести изучение аттракторов и бифуркаций двумерного отображения F [и, следовательно, трехмерной системы (1)] к изучению одномерного кусочно-гладкого фактор-отображения

$$f: \bar{x} = (1 - \gamma + \gamma |x|^\nu) \text{sign } x \quad (2)$$

Рассмотрим отдельно два случая $\nu < 1$ и $\nu > 1$ и сравним динамику кусочно-линейной системы (1) с динамикой известных гладких аналогов: исходной системы Лоренца и лоренцевской системы Любимова-Закса.

Для случая $\nu < 1$ полное исследование бифуркаций системы (1) дано в теореме 3 работы [1]. Используя этот результат, построим и сравним бифуркационные диаграммы системы (1) и оригинальной системы Лоренца (рис. 1). Для обеих диаграмм мы выбираем маршрут $a \rightarrow f$ бифуркаций коразмерности 1 [линия со стрелкой на рис.1], ведущий от тривиальной динамики к рождению странного аттрактора. Двигаясь по маршруту, мы меняем параметры b и r , отвечающие за z -координату фокусов $e_{l,r}$ в обеих системах. Для точек маршрута получено следующее сравнение:

а) Обе системы имеют два устойчивых фокуса $e_{l,r}$, притягивающих все фазовое пространство, кроме устойчивого многообразия седла O_s .



б) Эта точка принадлежит гомоклинической бифуркационной кривой H_1 , где сепаратрисы седла образуют гомоклиническую бабочку. Эта бифуркация приводит к рождению пары седловых предельных циклов $C_{1,2}$, а также нетривиального предельного множества Ω седловых орбит.

с) Обе системы имеют устойчивые фокусы и нетривиальное предельное множество Ω . Сепаратрисы стремятся к «противоположным» фокусам.

д) Маршрут пересекает гетероклиническую бифуркацию (кривые b_{het} и l_{het} на рис. 1), когда сепаратрисы седла попадают на двумерные устойчивые многообразия седловых орбит $C_{1,2}$. Эта бифуркация приводит к рождению странного аттрактора через образование поглощающей области, содержащей только орбиты седлового типа.

е) Устойчивые фокусы $e_{l,r}$ и странный аттрактор сосуществуют (см. желтую область на рис. 2).

ф) Наконец, маршрут пересекает кривую бифуркации Андронова-Хопфа (b_{AH} и l_{AH} на рис. 1), где $C_{1,2}$ сжимаются в фокусах $e_{l,r}$, делая их неустойчивыми, и входит в область параметров (зеленая область на диаграммах), где странный аттрактор является единственным притягивающее множество обеих систем.

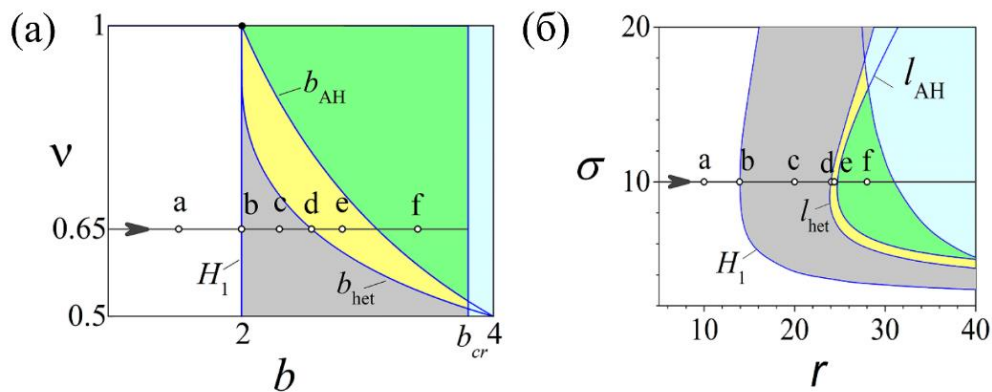


Рисунок 1 – Бифуркационные диаграммы (а) системы (1) и (б) системы Лоренца. В обеих системах основные бифуркации происходят в одном и том же порядке

Рассмотрим систему (1) в случае $v > 1$ и проследим соответствие между бифуркациями и аттракторами системы (1) и системы Лоренца-Любимова-Закса, являющейся обобщением системы Лоренца на случай отрицательной седловой величины [4]. Эта система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y) + \sigma y D(z - r), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (3)$$

где σ, β, r, D — положительные параметры.

Для сравнения для обеих систем были выбраны бифуркационные маршруты, проходящие через бифуркации коразмерности 1 в областях $v > 1$ (см. рис. 2). Эти маршруты определяются так: $v = 1.25, b \in [1.4, 3.8]$ для системы (1) и $r = 0.881D$ для системы (3). Двигаясь по этим маршрутам, мы получили одну и ту же последовательность бифуркаций:

а) обе системы имеют два устойчивых фокуса $e_{l,r}$, притягивающих все фазовое пространство, за исключением устойчивого многообразия седла O_s .

б) Системы имеют два симметричных устойчивых предельных цикла $C_{1,2}$, рожденных из фокусов $e_{l,r}$ через суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа [кривая b_{AH} для системы (1) и l_{AH} для системы (3)].

с) Системы претерпевают первую гомоклиническую бифуркацию H_1 , когда циклы $C_{1,2}$ сталкиваются с устойчивым многообразием седла O_s и образуют однообходную гомоклиническую бабочку B_1 , которая притягивает все фазовое пространство.

д) Обе системы имеют восьмерочный 2-периодический устойчивый предельный цикл C_2 , рожденный из B_1 . Цикл C_2 остается устойчивым до своей бифуркации вилка F_2 .

е) При бифуркации F_2 цикл C_2 теряет устойчивость и из него рождаются два устойчивых симметричных восьмерочных предельных цикла $C_{1,2}^2$.

ф) Системы претерпевают вторую гомоклиническую бифуркацию H_2 , при которой циклы $C_{1,2}^2$ слипаются в седле O_s и образуют 2-периодическую гомоклиническую бабочку B_2 . Подобно случаю точки (с), H_2 приводит к рождению 4-периодического предельного цикла C_4 , устойчивого до бифуркации вилка F_4 .

Далее пара бифуркаций H_{2^n} и F_{2^n} образует бесконечный каскад, пределом которого является появление бесконечного множества четных ∞ – периодических орбит C^∞ . За этим пределом рождается квазиотранный аттрактор типа Лоренца.

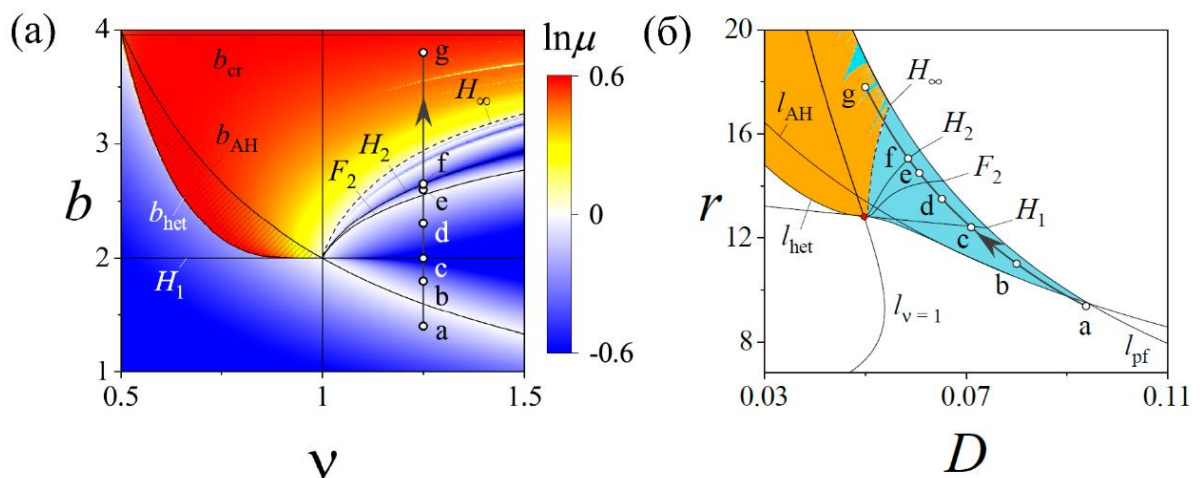


Рисунок 2 – Сравнение бифуркационных маршрутов $a - f$ для $\nu > 1$

(а) Бифуркационная диаграмма системы (1). Цветом показан показатель Ляпунова для фактор-отображения (2);

(б) Бифуркационная диаграмма системы (3). Оранжевым отмечены области с положительным максимальным показателем Ляпунова, а синим — с нулевым. Параметры: $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$. Для обеих систем маршруты пересекают одни и те же бифуркации. Точка g соответствует квазиотранному аттрактору лоренцевского типа

Более детальное сопоставление бифуркационной структуры, существующей вдоль маршрута, было проведено численно с помощью одномерных расширенных бифуркационных диаграмм (см. рис. 3). Для системы (1) была выбрана так же секущая Π . Для системы (3) мы вычислили отображение Пуанкаре вдоль траекторий потока для V -образной секущей, которая проходит через седло O_s , его сильно устойчивый собственный вектор и фокусы $e_{l,r}$. Параметры (D, r) изменялись в соответствии с маршрутом $a - f$.

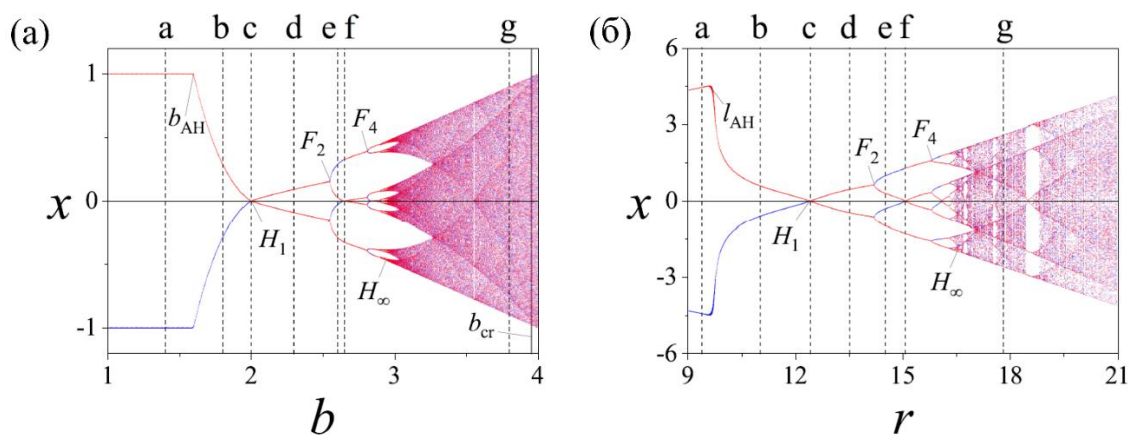


Рисунок 3 – Расширенные одномерные бифуркационные диаграммы, соответствующие маршруту $a - f$ в (а) системе (1) и (б) системе (3). Красные и синие точки представляют следы траекторий с начальными условиями в окрестности e_r и e_l соответственно и указывают на совпадение или различие притягивающих множеств

Обе диаграммы на рис. 3 показывают похожие бифуркационные множества, включая каскад «гомоклиника-вилка», явление самоподобия и окна периодичности. Это еще раз подтверждает, что система (1) с высокой степенью подобия реконструирует основные свойства квазиотраженных аттракторов в гладких системах типа Лоренца.

Таким образом, в работе показано, что в зависимости от значения седлового индекса ν , явно входящего в систему (1) в качестве параметра, она качественно воспроизводит ключевые бифуркации и аттракторы двух своих гладких аналогов — системы Лоренца с сингулярным гиперболическим аттрактором и системы Лоренца-Любимова-Закса (3) с квазиотраженным аттрактором. В отличие от гладких систем, для которых основные аналитические результаты получены в малой окрестности гомоклинической бабочки к нейтральному седлу, кусочно-гладкая система позволяет аналитически получить глобальное разбиение пространства параметров, не прибегая к асимптотическим методам, предположениям и постулированию необходимых свойств. Подробности приведенного здесь исследования будут доступны в нашей работе [5].

Аналитические результаты поддержаны Российским научным фондом (грант № 24-71-00073), численные результаты поддержаны Министерством науки и образования Российской Федерации (контракт № FSWR-2020-0036).

Список литературы:

1. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. – 2019. – Т. 29. – №. 10. – С. 103108.
2. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. – 2021. – Т. 31. – №. 4. – С. 043117.
3. Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. Bifurcations of chaotic attractors in a piecewise smooth Lorenz-type system // *Automation and Remote Control*. – 2020. – Т. 81. – №. 8. – С. 1385-1393.
4. Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1983. – Т. 9. – №. 1-2. – С. 52-64.

5. Barabash N. V., Bakalina D. A., Belykh V. N. Analytically tractable reconstruction of singular hyperbolic and quasi-strange attractors of Lorenz-type systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2025 (принята в печать).

