

УДК 517.925/926

АТТРАКТОРЫ СИСТЕМ ЛОРЕНЦА И ЧЕНА, ПРИВЕДЕННЫХ К ЕДИНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Суроегина Анастасия Евгеньевна¹, преподаватель

e-mail: nsuroegina@mail.ru

Белых Владимир Николаевич¹, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

¹Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. В работе представлено сравнительное исследование двух известных динамических систем третьего порядка Лоренца и Чена. Показано, что эти системы приводятся к единой нормальной форме, имеющей при различных значениях параметров различные странные аттракторы. Доказано, что аттракторы Лоренца и Чена соответствуют двум различным непересекающимся областям параметров нормальной формы и имеют принципиально разную топологическую структуру.

Ключевые слова: динамические системы, аттрактор Лоренца, аттрактор Чена, нормальная форма.

ATTRACTORS OF LORENZ AND CHEN SYSTEMS REDUCED TO ONE AND THE SAME NORMAL FORM

Anastasia E. Suroegina¹, Lecture

e-mail: nsuroegina@mail.ru

Vladimir N. Belykh¹, Professor, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Head of the Department of Mathematics

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

¹Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The paper presents a comparative study of two well-known third-order Lorenz and Chen dynamical systems. It is shown that these systems are reduced to one and the same normal form which has a family of different strange attractors. It is proven that the Lorenz system and the Chen system have two different strange attractors for different regions of parameters of the normal form. This attractor cannot be topologically conjugate.

Keywords: dynamical systems, Lorenz attractor, Chen attractor, normal form.

Особое место в теории динамических систем занимает понятие аттрактора, которое представляет собой компактное подмножество, к которому стремятся траектории из некоторой окрестности при $t \rightarrow \infty$. Аттракторы бывают различных типов, однако наиболее известные и изученные возникают в системах третьего порядка Лоренца и Чена. Первые упоминания о системе Лоренца были опубликованы в 1963 [1], как упрощенной модели атмосферной конвекции, а об аттракторе Чена и его системе - в 1999 [2]. Было проведено много исследований обеих систем, однако в 2013 году группа ученых из Испании опубликовали статью [3], в которой говорилось, что система Чена в общем случае при $c \neq 0$, является частным случаем системы Лоренца, а стало быть, предыдущие работы по данной системе не играют особой роли. В свою очередь Г. Чен опубликовал комментарий [4], в котором указал, что утверждения статьи Антонио Алгабы и его соавторов несостоятельны.

В данной работе мы провели сравнительный анализ обеих систем, для этого при помощи преобразований свели их к единой системе, описанной в 1984 [5] году В.Н. Белых. Эту форму будем называть нормальной. Рассмотрим эти преобразования.

Изначально система Лоренца имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y) \\ \dot{y} = -xz + rx - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

При выборе новых переменных $y_1 = \sigma(y - x), z_1 = -bz + xy - \frac{1}{\sigma}xy_1$ система приводится к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = y_1 \\ \dot{y}_1 = \sigma \left(-xz_1 - \frac{x^3}{2\sigma} + (r-1)x \right) + (1+\sigma)y_1 \\ \dot{z}_1 = -bz_1 + \left(\frac{2\sigma-b}{2\sigma} \right) x^2 \end{cases} \quad (2)$$

Нормируя время и переменные $t = \omega t', x = mx', y_1 = \frac{m}{\omega}y_2, z_2 = nz_1$, где $\omega = \frac{1}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$, $m = \sqrt{2\sigma(r-1)}, n = \frac{1}{r-1}$ и вводя новые параметры $\lambda = \frac{(1+\sigma)}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$, $\alpha = \frac{b}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$, $\beta = \frac{(2\sigma-b)}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$ получаем систему в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}' = y_2 \\ \dot{y}_2 = -(x'^2 + z_2 - 1)x' - \lambda y_2 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \beta x'^2 \end{cases} \quad (3)$$

На рисунке 1 приведены траектории аттрактора Лоренца в системе (1) при $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$, выпущенные из окрестности $O(0; 0; 0)$, а на рисунке 2 изображен тот же аттрактор Лоренца, возникающий в системе (3) при тех же значениях параметров, пересчитанных в параметры $\alpha \approx 0.16, \beta \approx 1.055, \lambda \approx 0.67$.

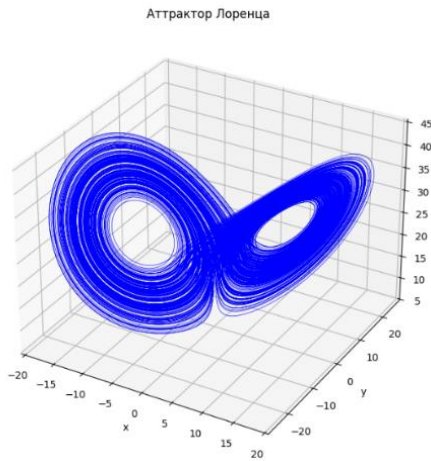


Рисунок 1 – Аттрактор Лоренца в системе (1)

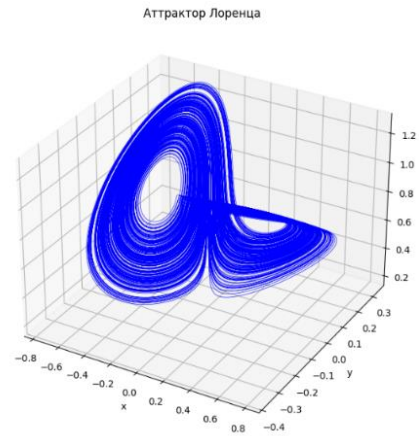


Рисунок 2 – Аттрактор Лоренца в системе (3)

Для системы Чена

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (4)$$

проведены аналогичные замены. Сначала сделана замена $y_1 = a(y - x)$, $z_1 = z - \frac{1}{2a}y_1$, которая приводит систему (4) к виду:

$$\begin{cases} \dot{x} = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\left(az_1 - \frac{x^2}{2} - a(2c - a)\right)x - (c - a)y_1 \\ \dot{z}_1 = -bz_1 + \left(\frac{2a - b}{2a}\right)x^2 \end{cases} \quad (5)$$

Затем, нормируя время и переменные по формулам $t = \omega t'$, $x = mx'$, $y_1 = ny_2$, $z_2 = pz_1$, где $\omega = \frac{1}{\sqrt{a(2c-a)}}$, $m = \sqrt{2a(2c-a)}$, $p = 2c - a$,

$n = \sqrt{2}a(2c - a)$ и вводя параметры нормальной формы в этот раз в виде $\lambda = (a - c)\omega$, $\alpha = b\omega$, $\beta = (2a - b)\omega$, приводим систему к виду (3).

На рисунке 3 приведены траектории аттрактора Чена в системе (4) при $a = 35, b = 3, c = 28$, выпущенные из окрестности $O(0; 0; 0)$, а на рисунке 4 – аттрактор Чена в нормальной форме (3) при пересчитанных параметрах $\omega \approx 0.037, \alpha \approx 0.11, \beta \approx 2.47, \lambda \approx 0.26$.

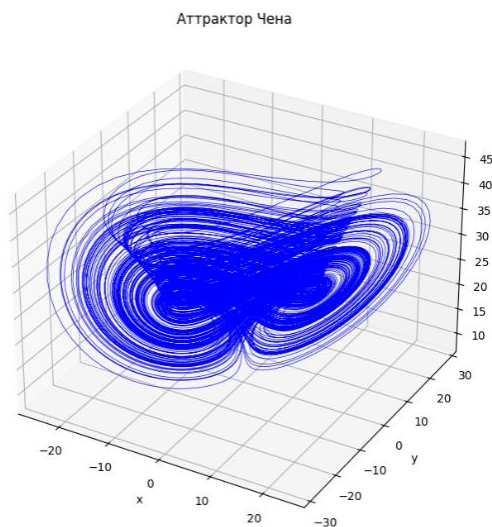


Рисунок 3 – Аттрактор Чена в системе (4)

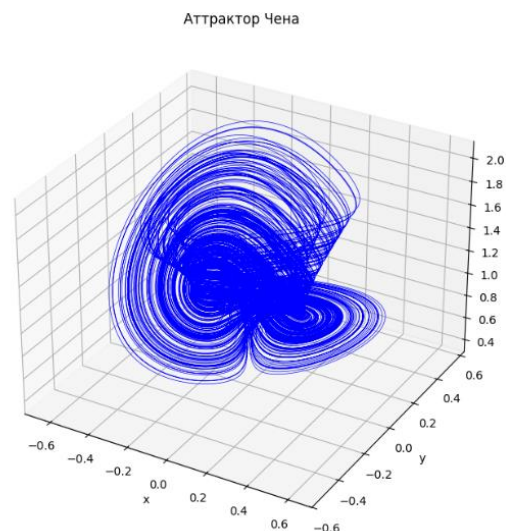


Рисунок 4 – Аттрактор Чена в системе (3)

Условия существования этих двух аттракторов в нормальной форме различны. Аттрактор Лоренца существует в области параметров $\lambda > \frac{\alpha + \beta}{2}$ (на рисунках 5,6 отмечены красным цветом), а аттрактор Чена возникает при условии $\alpha + \beta = 2(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1})$ (на рисунках 5,6, отмечены зеленым цветом).

Проведенный качественно-численный анализ показывает, что эти аттракторы имеют принципиально разную топологическую структуру.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00420).

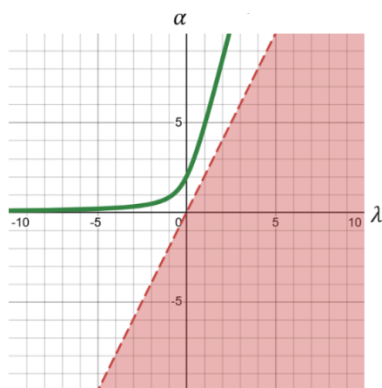


Рисунок 5 – Многообразия параметров в сечении $\beta = 0$, соответствующие аттракторам Лоренца (красный) и Чена (зеленый)

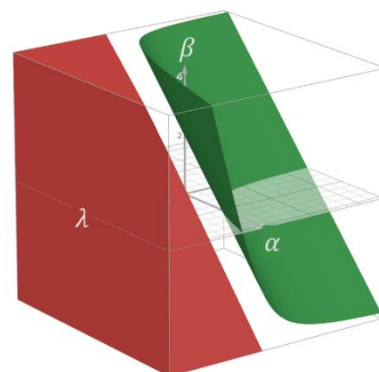


Рисунок 6 – Многообразия параметров, соответствующие аттракторам Лоренца (красный) и Чена (зеленый)

Список литературы:

1. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow 1 //Universality in Chaos, 2nd edition. Routledge, 2017. – С. 367-378.
2. Chen G., Ueta T. Yet another chaotic attractor //International Journal of Bifurcation and chaos. – 1999. – Т. 9. – №. 07. – С. 1465-1466.
3. Algaba A. et al. Chen's attractor exists if Lorenz repulsor exists: The Chen system is a special case of the Lorenz system //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2013. – Т. 23. – №. 3.

4. Chen G. Comment on “Chen's attractor exists if Lorenz repulsor exists: The Chen system is a special case of the Lorenz system” //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2013. – Т. 23. – №. 3.

5. Белых В. Н. О бифуркации сепаратрис седла системы Лоренца // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20. – №. 10. – С. 1666-1674.

