5 [2025]
ISBN 978-5-901722-00-8
ТРАНСПОРТ. ГОРИЗОНТЫ РАЗВИТИЯ

УДК 517.925/926

УСЛОВИЯ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ НЕБЛУЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВ МНОГОМЕРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ТИПА ЭНО-ЛОЗИ

Гречко Дина Алексеевна[1], преподаватель кафедры математики
e-mail: d.grechko.18@gmail.com
Белых Владимир Николаевич[1], доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики, профессор
e-mail: Belykh.vn@vsuwt.ru

[1] Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. В данной статье исследуются условия гиперболичности неблуждающих множеств многомерного отображения типа Эно-Лози. Основное внимание уделено построению инвариантных растягивающих конусов и доказательству гиперболичности аттрактора при выполнении определенных условий на параметры системы. В работе получены достаточные условия гиперболичности подковы Смейла многомерного отображения типа Эно системы F, и аттрактора в случае многомерного отображения типа Лози.

Ключевые слова: отображение Эно-Лози, аттрактор, гиперболичность, инвариантные конусы, многомерные динамические системы.

CONDITIONS OF HYPERBOLICITY FOR NON-WANDERING SETS OF A MULTIDIMENSIONAL HENON-LOSI MAP

Dina A. Grechko[1], Lecturer in the Department of Mathematics
e-mail: d.grechko.18@gmail.com
Vladimir N. Belykh[1], Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematics, Professor
e-mail: Belykh.vn@vsuwt.ru

[1] Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. In this paper, authors study conditions of hyperbolicity for non-wandering sets of a multidimensional Henon-Losi map. The main attention is paid to the construction of invariant expanding cones and the proof of the hyperbolicity of the attractor under certain conditions on the system parameters. In this paper, authors obtain sufficient conditions for the hyperbolicity of the Smale horseshoe of a multidimensional Henon-Losi type mapping of the system F, and of the attractor in the case of a multidimensional Losi type mapping.

Keywords: Henon-Losi map, attractor, hyperbolicity, invariant cones, multidimensional dynamical systems.

Рассматривается отображение вида

$$F:\begin{cases}\bar{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i y_i\,, \\ \bar{y}_1 = bx, \\ \bar{y}_i = by_{i-1}, \qquad i = 2, \dots, n\end{cases}, \tag{1}$$

где $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ – действительные переменные

$b, a_1, a_2, \dots, a_n$ – параметры.

Запись $(\bar{x},\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$ обозначает следующую итерацию переменных $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

В двумерном случае $(n = 1)$ при $f(x) = 1 - kx^2$ отображение F есть знаменитое отображение Эно [1], а при $f(x) = 1 - k|x|$ – отображение Лози [2].

Пусть параметры отображения удовлетворяют условиям

$$0 < b < 1, \qquad |a_i| < a < 1, i = 1,2, \dots, n, \qquad a_n \neq 0,$$
$$a\sum_{i=1}^{n} b^i < \frac{ab}{1-b} \triangleq A < 1. \tag{2}$$

Заметим, что отображение F (1) имеет обратное отображение F^{-1}, которое можно выписать в явном виде

$$F^{-1}:\begin{cases} x = b^{-1}\bar{y}_1, \\ y_i = b^{-1}\bar{y}_{i+1}, \qquad i = 1,2, \dots, n-1 \\ y_n = a_n^{-1}\left[x + f(b^{-1}\bar{y}_1) - b^{-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \bar{y}_{i+1}\right]\end{cases}$$

Обозначим области в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$D_\beta = \{x, Y \mid |x| \le \beta, \|Y\| < B\beta\},$$
$$D = \{x, Y \mid |x| \le \mathbb{R}^1, \|Y\| < B\beta\}, \tag{3}$$
$$B = \frac{b}{1-b},$$

где β – это произвольный параметр, и $\|Y\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i|$.

Справедлива следующая

Лемма 1. Образ области D_β лежит в D, и он определяется следующими условиями:

$$f^-\left(\frac{y_1}{b}\right) \le x \le f^+\left(\frac{y_1}{b}\right),$$
$$|y_1| \le bB, \qquad \|Y\| < B\beta, \tag{4}$$

где $f^-(x)$ и $f^+(x)$ – это вспомогательные одномерные отображения вида

$$\bar{x} = f(x) + \gamma \triangleq f^+(x),$$
$$\bar{x} = f(x) - \gamma \triangleq f^-(x).$$

В работе доказана

Теорема 1. *Пусть параметр β выбран так, что функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|x| \le \beta, \qquad |f(x)| < \beta - \gamma = (1 - A)\beta. \tag{5}$$

Тогда отображение (1) имеет аттрактор $\mathcal{A} \subset D_\beta$.

Как известно, теория гиперболичности основана на построении инвариантных конусов [3-5], определенных в точках области G фазового пространства, содержащей инвариантный набор орбит $I \subset G$.

Линеаризация отображения $F|_I$ дает матрицу Якоби вида

$$L(x) = \begin{bmatrix} f'_x & \boldsymbol{a}^T \\ \boldsymbol{b} & Q \end{bmatrix},$$

которая определяет уравнения в вариациях $\bar{V} = L(x)V$

$$\begin{cases} \bar{u} = f'(x)u + \boldsymbol{a}^T v, \\ \bar{v} = \boldsymbol{b}u + Qv, \end{cases} \tag{6}$$

где $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}^1, v \in \mathbb{R}^n$ – это вектор размерности $(n+1)$, содержащий локальные координаты вдоль инвариантного набора орбит I. Пусть $\bar{x} = f(x)$ – кусочно-гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$|f'(x)| > d > 1. \tag{7}$$

Определение 1. Пудем говорить, что конус

$$K^u = \left\{ V \mid \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R}^1, \|v\| < R \right\} \tag{8}$$

инвариантный, если $LV \in V$ для $V \in K^u$, и растягивающий, если существует такое значение $q > 1$, что

$$\|LV\|_e > q\|V\|_e, \qquad V \in K^u, \tag{9}$$

где $\|\cdot\|_e$ – L2-норма.

Лемма 2. Пусть значения параметров d и R из (8) и (9) удовлетворяют неравенству

$$b + \frac{b + aR^2}{R} < d. \tag{10}$$

Тогда конус K^u (8) инвариантен.

Справедлива следующая

Лемма 3. Пусть отображение (6) имеет инвариантный конус (8), и пусть значения параметров d и R удовлетворяют неравенству

$$aR + \sqrt{1 + R^2} < d. \tag{11}$$

Тогда отображение (1) является растягивающим так, что значение параметра q из неравенства (9) можно найти по формуле

$$q = \left(1 + b^2 \frac{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2}{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Из Леммы 2 и Леммы 3 мы получаем, что выполняется следующая

Теорема 2. Существует единственное значение $R_c \in \left(b, \frac{b}{1-b}\right)$ такое, что для

$$d > \begin{cases} d_{inv}(R) \triangleq b + \dfrac{b + aR^2}{R}, & 0 < R < R_c \\ d_{hyp}(R) \triangleq aR + \sqrt{1 + R^2}, & R \geq R_c \end{cases}$$

отображение (6) имеет инвариантный растягивающий конус K^u, и отображение $F|_I$ является гиперболичным.

Таким образом, в работе получены достаточные условия гиперболичности подковы Смейла многомерного отображения типа Эно системы F, и аттрактора в случае многомерного отображения типа Лози.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 24-21-00420).

Список литературы:

1. M. Hénon, A two-dimensional mappings with a strange attractor // Commun. Math. Phys, 1976, 50(1), pp. 69-77.

2. Lozi R. Un attracteur de Henon // J. Phys. 1978. V. 39. Coll,C5. P. 9-10.

3. Белых, В. Н. Гиперболический аттрактор непрерывного кусочно-гладкого двумерного отображения / В. Н. Белых, Б. С. Украинский // Сб.науч.тр. / ВГАВТ. - Н. Новгород, 1996. – Вып.237,ч.2. - С. 137

4. Белых, В. Н. Условия гиперболичности аттракторов некоторых кусочно-линейных многомерных отображений [Текст] / В. Н. Белых, В. Ф. Грибов // Межвуз.сб. науч.тр. / ВГАВТ. - Н. Новгород, 1998. – Вып.275,ч.2. - С. 3-6.

5. Белых, В. Н. Сингулярно-гиперболический аттрактор отображения многомерного цилиндра / В. Н. Белых, Д. А. Гречко // Динамические системы. – 2018. – Т. 8 (36), № 4. – С. 373-383.