

УДК 517.925/926

**БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО БИФУРКАЦИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ
ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ ОРБИТ В СИСТЕМАХ ЛОРЕНЦА, ЧЕНА, ЛУ И ТИГАНА**

Белых Владимир Николаевич^{1,2}, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики, главный научный сотрудник кафедры теории управления и динамики систем

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

Барабаш Никита Валентинович^{1,2}, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, доцент кафедры теории управления и динамики систем

e-mail: barabash@itmm.unn.ru

Суроегина Анастасия Евгеньевна^{1,2}, преподаватель

e-mail: nsuroegina@mail.ru

¹ Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

² Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

Аннотация. В работе показано, что системы Лоренца и Чена приводятся к одной и той же универсальной нормальной форме при разных значениях параметров. Доказано существование бесконечного множества бифуркаций вращающихся гомоклинических орбит. Установлено, что в оригинальной системе Лоренца эти орбиты не вращаются вокруг оси симметрии, а в оригинальной системе Чена совершают несколько вращений вокруг этой оси. Таким образом, топологические структуры траекторий в фазовом пространстве этих двух систем имеют принципиальные различия.

Ключевые слова: система Лоренца, система Чена, гомоклинические орбиты, бифуркации, хаос.

**INFINITE SET OF BIFURCATIONS OF ROTATING HOMOCLINIC ORBITS IN THE
LORENZ, CHEN, LU AND TIGAN SYSTEMS**

Vladimir N. Belykh^{1,2}, Professor, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Head of the Department of Mathematics

e-mail: belykh.vn@vsuwt.ru

Nikita V. Barabash^{1,2}, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics

e-mail: barabash@itmm.unn.ru

Anastasia E. Suroegina^{1,2}, Lecture

e-mail: nsuroegina@mail.ru

¹ Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod, Russia

² Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The paper demonstrates that the Lorenz and Chen systems are reduced to the same universal normal form for different parameter regions. The existence of an infinite number of bifurcations of rotating homoclinic orbits is proven. It is established that in the original Lorenz system, these orbits do not rotate around the axis of symmetry, while in the original Chen system, they perform multiple rotations around this axis. Thus, the topological structures of trajectories in the phase space of these two systems are fundamentally different.

Keywords: Lorenz system, Chen system, homoclinic orbits, bifurcations, chaos.

В рамках теории динамических систем важнейшую роль играет такое понятие, как аттрактор. Речь идёт о компактном подмножестве фазового пространства, к которому с течением времени (при $t \rightarrow \infty$) притягиваются траектории из некоторой окрестности. Существует много разновидностей аттракторов, но наиболее подробно исследованы те из них, которые возникают в динамических системах третьего порядка. Классическими примерами здесь служат системы Лоренца и Чена, опубликованные в 1963 [1] и 1999 [2] соответственно. Система Лоренца является упрощённой моделью конвективных движений в атмосфере, ее три параметра имеют физический смысл и потому считаются положительными. Система Чена имеет отношение к управляемым системам. Позднее появилось много других систем с хаотическими аттракторами, среди которых близкими к системам Лоренца и Чена являются системы Лу и Тигана [3-4].

В 2013 году вышла скандальная статья группы испанских исследователей [5], в которой было проведено неадекватное сравнение перечисленных систем. В частности, утверждалось, что система Чена является частным случаем системы Лоренца с отрицательными значениями параметров. Г. Чен опубликовал ответный комментарий [6], где подчеркнул, что выводы, сделанные Антонио Алгабой и его коллегами, являются спорными и недостаточно обоснованными.

Целью данной работы является сравнительное изучение этих систем. Было получено, что с помощью некоторых преобразования координат и параметров эти системы преобразуются к единому виду, описанному ещё в 1984 году В.Н. Белых [7]. Эту форму в дальнейшем мы называем универсальной нормальной формой (УНФ). Приведем указанные преобразования, для чего рассмотрим рассматриваемую обобщенную систему Лоренца [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a(x - y), \\ \dot{y} = (r - z)x - qy, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (1)$$

Для которой получены условия на параметры, при которых реализуются каждая из четырех систем, указанных в таблице:

Таблица 1. Условия на параметры для обобщенной системы

Система	Условия на параметры
Лоренц	$r > 0, q = 1$
Чен	$r = c - a, q = -c, c > 0$
Лу	$r = 0, q = -c, c > 0$
Тиган	$r = c - a, q = 0$

Указанные преобразования координат есть взаимно-однозначное отображение

$$V: (x, y, z, t) \rightarrow \left[\frac{\omega}{\sqrt{2}} x, \frac{\omega^2 a}{\sqrt{2}} (y - x), \omega^2 \left(az - \frac{x^2}{2} \right), \frac{t}{\omega} \right], \quad (2)$$

где $\omega^{-2} = a(r - q) > 0$. Преобразование параметров задается отображением $P: (a, b, c) \rightarrow (\lambda, \alpha, \beta)$, $q = \text{const}$, имеющим вид $\lambda = (q + a)\omega$, $\alpha = b\omega$, $\beta = (2a - b)\omega$, $r > q > -a$.

В результате универсальная нормальная форма имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(x^2 + z - 1)x - \lambda y \\ \dot{z} = -\alpha z + \beta x^2 \end{cases} \quad (3)$$

Введем в полученной системе (3) характеристический параметр $A = \frac{\alpha + \beta}{2}$, с помощью которого плоскость параметров (A, λ) разбивается на области, соответствующие рассматриваемым системам (см. рис. 1).

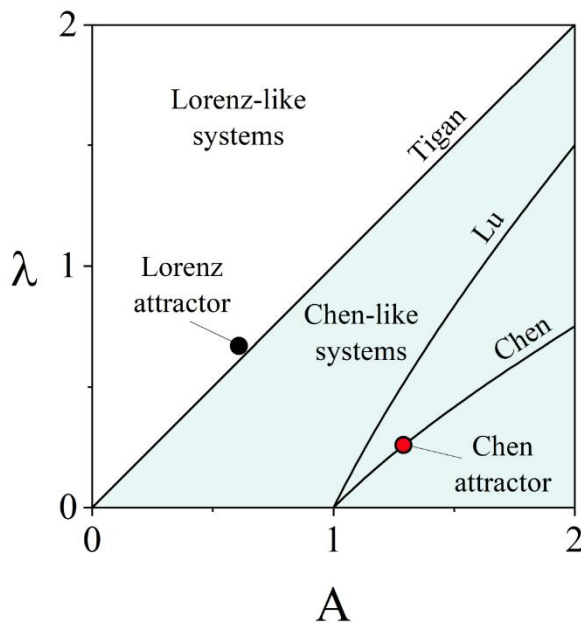


Рисунок 1 – Плоскость параметров A и λ для УНФ

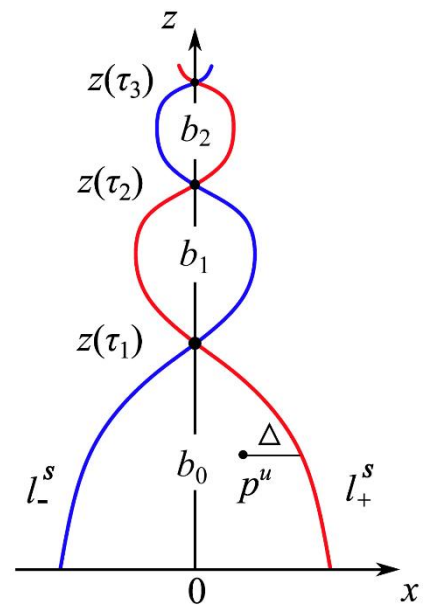


Рисунок 2 – Качественный вид линий пересечения $l_{\pm}^s = W^s \cap S$

На этом рисунке белая область соответствует системе Лоренца ($\lambda > A$), серо-голубая – системе Чена ($\lambda < A$), линии определяют системы Лу ($\lambda = \frac{A^2 - 1}{A} < A$) и Тиган ($\lambda = A$). Черная точка с координатами $(A = 0,608, \lambda = 0,669)$ соответствует исходному аттрактору Лоренца. Красная точка с координатами $(A = 1,29, \lambda = 0,26)$ соответствует исходному аттрактору Чена.

УНФ имеет три состояния равновесия: $O(0, 0, 0)$ и $E^{\pm} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}, 0, \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)$. Причем для седла

O получаем $e_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 1}$, $e_3 = -\alpha < 0$, таким образом седло имеет одномерное неустойчивое многообразие W^u и двумерное устойчивое многообразие W^s . Система (3) имеет глобальную секущую Пуанкаре $S = S^- \cup S^+$, $S^{+(-)} = \{x > 0 (x < 0), y = 0, z > 0\}$, на которой траектории системы (3) реализуют отображение последования. Неустойчивое одномерное многообразие W^u проходит через область

$$g^u = \left\{ 0 \leq y < \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4}}, \frac{\beta}{\alpha+2} x^2 < z < \frac{\beta}{\alpha} x^2 \right\} \quad (4)$$

и пересекает секущую S^+ в точке $p^u(x^u, z^u) = W^u \cap S^+$ (см. рис. 2). Устойчивое двумерное многообразие W^s вращается вокруг инвариантной прямой $I = \{x = y = 0, z \geq 0\}$, причем оно вращается быстрее, чем касательное многообразие $W_t^s = \left\{ y = -\left(\frac{\lambda}{2} + \eta^s(t)\right)x, z \geq 0 \right\}$, где η^s – решение уравнения Риккати

$$\begin{cases} \dot{\eta} = a(t) + \eta^s, \\ a(t) = z_0 e^{-\alpha t} - 1 - \frac{\lambda^2}{4}. \end{cases} \quad (5)$$

Получено, что первым пересечением $W^s \cap S$ является последовательность кривые вида (см. рис. 2):

$$l_{\pm}^s = \{x = \pm x^s(z), z \in (0, z^*), y = 0\} \quad (6)$$

Бифуркации гомоклинических орбит происходят при значениях параметров, определенных условием $p^u \in l_{-}^s \cup l_{+}^s$, соответствующим попаданию неустойчивого многообразия W^u на устойчивое многообразие W^s , при котором и образуется гомоклиническая орбита.

В статье [8] были доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. В области положительных параметров (α, β) существует бифуркационная поверхность $\lambda = \lambda_0(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая условиям

$$\lambda_0(0,0) = 0, \quad \lambda_0(\alpha, \beta) > 0$$

и соответствующая существованию двух симметричных гомоклинических орбит, попадающих в седло O без вращения вокруг инвариантной прямой I системы (3) в области

$$0 < z < z_1.$$

Теорема 2. В области положительных параметров λ, β существует бесконечное множество бифуркационных поверхностей $\alpha = \alpha_k(\lambda, \beta)$, $k = 1, 2, \dots$, соответствующих существованию двух симметричных вращающихся гомоклинических орбит седла O системы (3). При $k = 2m$ ($m = 1, 2, \dots$) орбита делает m оборотов вокруг прямой I , а при $k = 2m + 1$ ($m = 0, 1, \dots$) – m с половиной оборотов.

В результате этих бифуркаций в системе (3) рождается нетривиальное хаотическое множество траекторий. Стандартным является бифуркационный переход: гомоклиническая орбита $\rightarrow$ Канторово множество нетривиальных траекторий $\rightarrow$ странный аттрактор. Этот переход рассматривается нами, как общий сценарий рождения хаотических аттракторов с различной топологической структурой.

Список литературы:

1. Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow 1 //Universality in Chaos, 2nd edition. Routledge, 2017. – С. 367-378.



2. Chen G., Ueta T. Yet another chaotic attractor //International Journal of Bifurcation and chaos. – 1999. – Т. 9. – №. 07. – С. 1465-1466.
3. Čelikovský S., Chen G. On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2002. – Т. 12. – №. 08. – С. 1789-1812.
4. Chen G. Generalized Lorenz systems family //arXiv preprint arXiv:2006.04066. – 2020.
5. Algaba A. et al. Chen's attractor exists if Lorenz repulsor exists: The Chen system is a special case of the Lorenz system //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2013. – Т. 23. – №. 3.
6. Chen G. Comment on “Chen's attractor exists if Lorenz repulsor exists: The Chen system is a special case of the Lorenz system” //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2013. – Т. 23. – №. 3.
7. Белых В. Н. О бифуркации сепаратрис седла системы Лоренца // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20. – №. 10. – С. 1666-1674.
8. Belykh V. N., Barabash N. V., Suroegina A. E. Twisted Homoclinic Orbits in Lorenz and Chen Systems: Rigorous Proofs Using Universal Normal Form //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2026. – Т. 36. – №. 07. – С. 2630016.

